ΕΝΟΤΗΤΑ 1η : ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΥΧΑΙΩΝ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΩΝ

1.1 ΟΡΙΣΜΟΙ

Στοχαστική Διαδικασία (ή Ανέλιξη) - (stochastic process)
(Σ.δ.)
αποτελεί το μαθηματικό μοντέλο ενός πειράματος τύχης και το οποίο εξελίσσεται στο χρόνο (ή στο χώρο) και παράγει μια ακολουθία από αριθμητικές τιμές. Η θεωρία των σ.δ. αποτελεί τη δυναμική της θεωρίας των πιθανοτήτων.

Παραδείγματα:

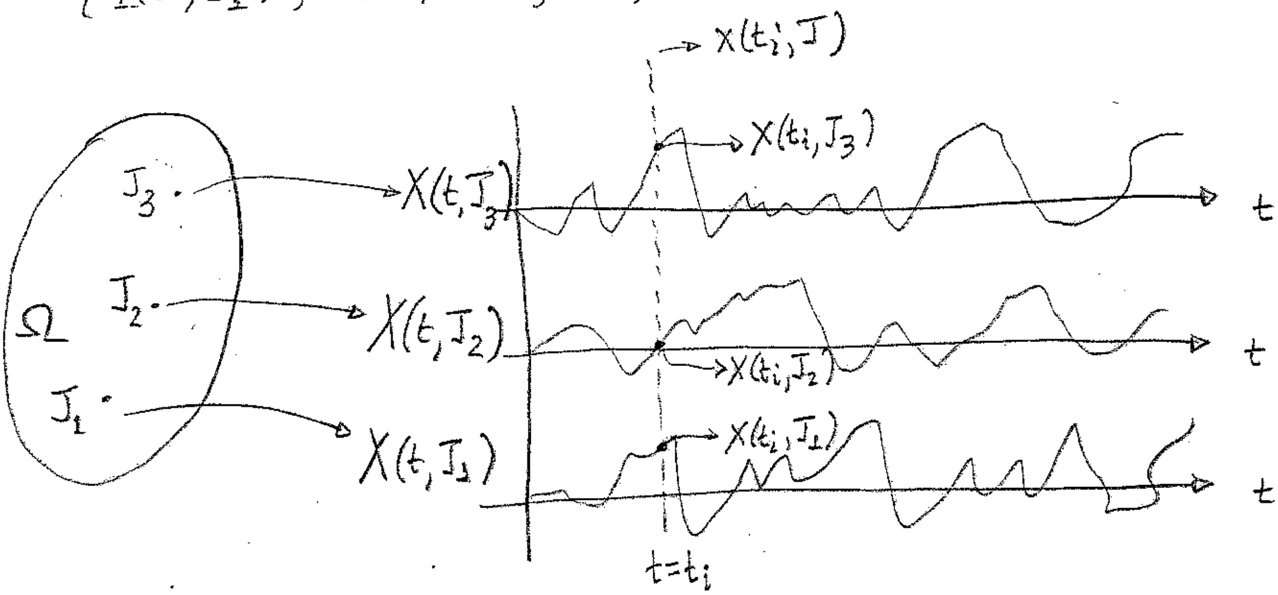
(1) Η ακολουθία των ημερησίων τιμών κλεισίματος μιας μετοχής
(2) Η ακολουθία των χρόνων βλάβης μιας μηχανής
(3) Η ακολουθία των ωριαίων φορτίων κίνησης σε ένα κόμβο τηλεπικοινωνιακού δικτύου.
(4) Η ακολουθία των μετρήσεων ενός φαντάρ σχετικά με τη θέση ενός αεροπλάνου.

- Κάθε αριθμητική τιμή της ακολουθίας μοντελοποιείται από μια τυχαία μεταβλητή, επομένως μια στοχαστική διαδικασία είναι πολύ απλά μια (πεπερασμένη ή άπειρη) οικογένεια τυχαίων μεταβλητών: $\{X(t), t\in T\}$, T: δεικτοσύνολο της σ.δ.

- Έστω λοιπόν ένα πείραμα τύχης με δειγματοχώρο Ω και απλά γεγονότα J_i

Σε κάθε αποτέλεσμα J_i του χώρου Ω αντιστοιχούμε μια συνάρτηση του χρόνου $X(t, J_i)$ σύμφωνα με κάποιο νόμο. Έτσι, σχηματίζουμε μια οικογένεια ή σύνολο (ensemble) συναρτήσεων του χρόνου:

$$\{X(t, J_1),\ X(t, J_2),\ \ldots,\ X(t, J_n)\}$$



Το σύνολο των συναρτήσεων αυτών ονομάζουμε στοχαστική διαδικασία (σ.δ.) ή στοχαστικό σήμα. Είναι συνάρτηση δύο μεταβλητών, της J και της t: $X(t, J)$. Για μια ορισμένη τιμή του χρόνου $t = t_i$, η $X(t_i, J)$ είναι μια τυχαία μεταβλητή. Μέλος (sample) της σ.δ. ονομάζουμε τη συνάρτηση $X(t, J_i)$ για μια ορισμένη τιμή του $J = J_i$: $x_i(t)$.

Σε κάθε εκτέλεση του πειράματος, μόνο ένα μέλος παρατηρείται από τα άπειρα πιθανά μέλη της σ.δ.

Κατηγοριοποίηση :

(1) Στοχαστικές Διαδικασίες συνεχούς ή διακριτού χρόνου :

Τα μέλη $x_i(t)$ είναι συναρτήσεις συνεχούς ή δι-κριτού χρόνου.

(2) Σ.δ. με συνεχείς ή διακριτές τιμές :

Οι τυχαίες μεταβλητές $X(t)$ είναι συνεχείς ή διακριτές.

Ερωτήματα και ζητήματα που θα μας απασχολήσουν :

(α) Θα επικεντρωθούμε σε αλληλεξαρτήσεις (dependencies) στην ακολουθία τιμών που παράγονται από την διαδικασία. Π.χ. Πως οι μελλοντικές τιμές μιας μετοχής εξαρτώνται από τις προηγούμενες.

(β) Θα ενδιαφερόμαστε για μέσους όρους σε όλη την ακολουθία των παραγωμένων τιμών (long-term averages). Π.χ. Τι ποσοστό του χρόνου βρίσκεται μια μηχανή εκτός λειτουργίας?

(γ) Θα θέλουμε να χαρακτηρίσουμε την πιθανότητα ή τη συχνότητα κάποιων ακραίων γεγονότων (boundary events). Π.χ. Ποια η πιθανότητα την συγκεκριμένη χρονική στιγμή όλα τα κυκλώματα ενός τηλεφωνικού συστήματος να είναι κατειλημμένα. Ποια η συχνότητα με την οποία ο buffer συγκεντρωτής σε κάποιο δίκτυο υπολογιστών γεμίζει με δεδομένα.

Αρχικά, θα μελετήσουμε δύο βασικές κατηγορίες σ.δ.

(1) Σ.δ. τύπου αφίξεων (Arrival-type processes):

Π.χ. λήψεις μηνυμάτων σε ένα δέκτη, ολοκληρώσεις εργασιών σε μια κατασκευαστική μονάδα, αγορές πελατών σε ένα μαγαζί κτλ.

Θα επικεντρωθούμε σε μοντέλα όπου οι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών αφίξεων (interarrival times) αποτελούν ανεξάρτητες τ.μ. Έτσι:

(α) Διαδικασία Bernoulli: Οι αφίξεις συμβαίνουν σε διακριτό χρόνο και οι χρόνοι μεταξύ αφίξεων ακολουθούν γεωμετρική κατανομή

(β) Διαδικασία Poisson: Οι αφίξεις συμβαίνουν σε συνεχή χρόνο και οι χρόνοι μεταξύ των αφίξεων ακολουθούν εκθετική κατανομή.

(2) Μαρκοβιανές σ.δ. (Markov Processes):

Πειράματα που εξελίσσονται στο χρόνο (ή χώρο) και στα οποία οι μελλοντικές καταστάσεις παρουσιάζουν μια πιθανοτική εξάρτηση από αυτές του παρελθόντος, αλλά με πολύ συγκεκριμένο τρόπο: Η επόμενη τιμή εξαρτάται από τις προγενέστερες μόνο μέσω της παρούσης τιμής, δηλαδή το μέλλον εξαρτάται μόνο από το παρόν και όχι από το παρελθόν.

1.2 Η Σ.Δ. BERNOULLI

Η σ.δ. Bernoulli μπορεί να προκύψει ως μια ακολουθία από ανεξάρτητες ρίψεις ενός κέρματος όπου η πιθανότητα να έρθει κεφαλή σε κάποια ρίψη είναι p με $0<p<1$.

Γενικά, η σ.δ. Bernoulli αποτελείται από μια ακολουθία δοκιμών Bernoulli, όπου κάθε δοκιμή παράγει ένα "1" (επιτυχία) με πιθανότητα p, ή ένα "0" (αποτυχία) με πιθ. $1-p$, ανεξάρτητα από το τι γίνεται στις υπόλοιπες δοκιμές.

Προφανώς η διαδοχική ρίψη νομίσματος είναι μόνο ένα παράδειγμα πειράματος που παράγει ανεξάρτητα δυαδικά αποτελέσματα.

Η σ.δ. Bernoulli χρησιμοποιείται για την μοντελοποίηση συστημάτων που ασχολούνται με αφίξεις πελατών ή εργασιών σε κέντρα εξυπηρέτησης: Ο χρόνος διακριτοποιείται σε περιόδους και "επιτυχία" στην k-στή περίοδο θεωρείται η άφιξη τουλάχιστον ενός πελάτη στο κέντρο εξυπηρέτησης κατά την k-στή περίοδο.

- Ορίζουμε λοιπόν ως σ.δ. Bernoulli μια ακολουθία $X_1, X_2, \dots$ ανεξάρτητων τ.μ. Bernoulli με

$$P(X_i=1)=P(\text{επιτυχία στην } i\text{-στη προσπάθεια})=p$$

$$P(X_i=0)=P(\text{αποτυχία} \quad -\text{''}- \quad)=1-p,$$

για κάθε i.

Σε μια σ.δ. αφίξεων, συχνά μας ενδιαφέρουν τ.μ. όπως ο αριθμός των αφίξεων σε κάποιο καθορισμένο χρονικό διάστημα ή ο χρόνος μέχρι την πρώτη άφιξη: Επομένως έχουμε τις εξής τ.μ. που σχετίζονται με μια σ.δ. Bernoulli:

- Η Διωνυμική με παραμέτρους p, n: Εκφράζει το συνολικό αριθμό των επιτυχιών, S, σε n ανεξάρτητες δοκιμές: $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

$$P_S(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

$$E[S] = np, \quad var(S) = np(1-p).$$

- Η Γεωμετρική με παρ. p: Εκφράζει τον αριθμό των δοκιμών, T, έως και την πρώτη επιτυχία:

$$P_T(t) = (1-p)^{t-1} \cdot p, \quad t = 1, 2, \ldots$$

$$E[T] = 1/p, \quad var(T) = \frac{1-p}{p^2}.$$

1.2.2 Ανεξαρτησία και Έλλειψη Μνήμης

Η υπόθεση ανεξαρτησίας της σ.δ. Bernoulli συνεπάγεται μια πολύ σημαντική ιδιότητα για την σ.δ.: Την έλλειψη μνήμης: Ότι έγινε στις προηγούμενες δοκιμές δεν δίνει καμία πληροφορία για το τι θα γίνει στις επόμενες.

- Ας ορίσουμε τ.μ. με βάση τα αποτελέσματα σε κάποιο σύνολο δοκιμών. Π.χ. ορίζουμε την τ.μ. $Z = (X_1 + X_3) X_6 X_7$. Αν έχουμε δύο τ.μ. αυτού του τύπου και αν τα αντίστοιχα σύνολα δοκιμών που τις ορίζουν είναι ξένα μεταξύ τους, τότε οι δύο αυτές τ.μ είναι ανεξάρτητες.

Παράδειγμα: Έστω U το σύνολο των επιτυχιών στις δοκιμές από 1 έως 5. Έστω V το σύνολο των επιτυχιών στις δοκιμές από 6 έως 10. Δηλαδή,

$$U = X_1 + \cdots + X_5, \qquad V = X_6 + \cdots + X_{10}.$$

Οι τ.μ. U και V είναι ανεξάρτητες αφού τα σύνολα $\{X_1, \ldots, X_5\}$ και $\{X_6, \ldots, X_{10}\}$ δεν έχουν κοινά στοιχεία.

Έστω τώρα η σ.δ. Bernoulli η οποία τρέχει για n χρονικά βήματα κατά τα οποία παρατηρούμε τις πειραματικές τιμές $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Προφανώς η ακολουθία των μελλοντικών δοκιμών $X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots$ αποτελείται από ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli και επομένως είναι μία σ.δ. Bernoulli. Επιπλέον οι επόμενες δοκιμές είναι ανεξάρτητες από τις προηγούμενες.

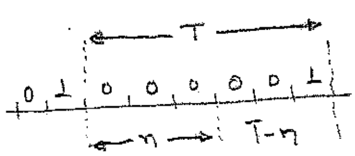
Συμπέρασμα: Αρχίζοντας από ένα αυθαίρετο σημείο στο χρόνο, το μέλλον μοντελοποιείται επίσης ως μία σ.δ. Bernoulli, η οποία είναι ανεξάρτητη από το παρελθόν. Αυτή είναι η ιδιότητα νέας αρχής (fresh-start) της σ.δ. Bernoulli.

□ Είδαμε ότι ο χρόνος T έως την πρώτη επιτυχία είναι μια γεωμετρική τ.μ.. Έστω ότι παρακολουθούμε τη σ.δ. για "n" δοκιμές (χρονικές στιγμές) και δεν έχουμε καμία επιτυχία. Τι μπορούμε να πούμε για τον αριθμό $T-n$ των υπολοίπων δοκιμών μέχρι την πρώτη επιτυχία;

Αφού το μέλλον της σ.δ. (μετά τις n δοκιμές) είναι ανεξάρτητο του παρελθόντος και αποτελεί μια νέα σ.δ. Bernoulli, ο αριθμός των μελλοντικών δοκιμών μέχρι την πρώτη επιτυχία ακολουθεί επίσης γεωμετρική κατανομή. Δηλαδή

$$P(T-n=t \,/\, T>n) = (1-p)^{t-1}\cdot p = P(T=t), \quad t=1,2,\ldots$$

Αυτή η ιδιότητα έλλειψης μνήμης μπορεί επίσης να δειχθεί χρησιμοποιώντας δεσμευμένες πιθανότητες:



$$P(T-n=t \,/\, T>n) = \frac{P(T=t+n \cap T>n)}{P(T>n)} = \frac{P(T=t+n)}{P(T>n)} = \frac{(1-p)^{t+n-1}\cdot p}{\sum_{k=n+1}^{+\infty}(1-p)^{k-1}\cdot p}$$

$$= \frac{p(1-p)^{t+n-1}}{p\sum_{m=0}^{+\infty}(1-p)^{m+n}} = \frac{p(1-p)^{t+n-1}}{p(1-p)^{n}\frac{1}{1-(1-p)}} = (1-p)^{t-1}\cdot p \;\blacksquare \quad [m=k-n-1]$$

Συμπερασματικά:

(1) Ο αριθμός $T-n$ των δοκιμών μέχρι την πρώτη επιτυχία μετά από χρόνο n ακολουθεί γεωμετρική κατανομή με παράμετρο p και είναι ανεξάρτητος από το παρελθόν.

(2) Για κάθε n, η ακολουθία των τ.μ. $X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots$ είναι επίσης σ.δ. Bernoulli, ανεξάρτητη (το μέλλον της σ.δ.) από τις $X_1,\ldots,X_n$ (το παρελθόν της σ.δ.).

<u>Παράδειγμα</u>: Έστω N η πρώτη χρονική στιγμή (δοκιμή) όπου έχουμε επιτυχία αμέσως μετά από μία άλλη επιτυχία. Δηλαδή, το N είναι το πρώτο i για το οποίο $X_{i-1}=X_i=1$. Ποια είναι η πιθανότητα $P(X_{N+1}=X_{N+2}=0)$ ότι δεν έχουμε επιτυχία στις επόμενες δύο δοκιμές;

Από τη στιγμή που η συνθήκη $X_{N-1}=X_N=1$ ικανοποιείται, το μέλλον της σ.δ. αποτελείται από ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli. Επομένως η πιθανότητα ενός γεγονότος που αναφέρεται στο μέλλον της σ.δ. είναι ίση με αυτή για μια νέα σ.δ. Bernoulli: $P(X_{N+1}=X_{N+2}=0)=(1-p)^2$.

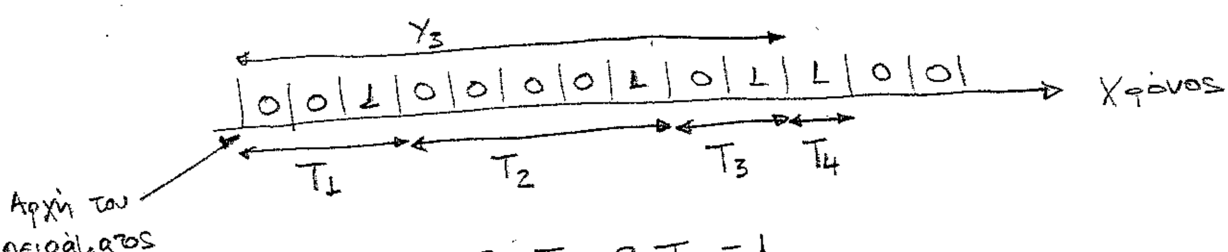
1.2.2 Χρόνοι μεταξύ των αφίξεων

Μια σημαντική τ.μ. που σχετίζεται με τη σδ. Bernoulli είναι ο χρόνος της k-στής επιτυχίας, Y_k. Επίσης, ορίζεται η τ.μ. T_k ως ο k-στός χρόνος μεταξύ των αφίξεων:

$$T_1=Y_1 \quad , \quad T_k=Y_k-Y_{k-1} \quad , \quad k=2,3,\dots$$

και αντιπροσωπεύει τον αριθμό των δοκιμών μετά την (k-1)-στή επιτυχία έως την επόμενη επιτυχία. Είναι προφανές ότι:

$$Y_k=T_1+T_2+\dots+T_k$$: αριθμός δοκιμών μέχρι την k-στή επιτυχία



$T_1=3,\ T_2=5,\ T_3=2,\ T_4=1$

$Y_1=3,\ Y_2=8,\ Y_3=10,\ Y_4=11.$

Είδαμε ήδη ότι ο χρόνος T_1 μέχρι την πρώτη επιτυχία ακολουθεί γεωμετρική κατανομή, με παράμετρο p. Έχοντας μια επιτυχία τη στιγμή T_1, το μέλλον είναι μια νέα σ.δ. Bernoulli. Επομένως, ο αριθμός δοκιμών T_2 έως την επόμενη επιτυχία ακολουθεί επίσης γεωμετρική κατανομή.

Επιπλέον, προηγούμενες δοκιμές (μέχρι την T_1-στή) είναι ανεξάρτητες από τις μελλοντικές (από την (T_1+1)-στή και μετά). Καθώς η τ.μ. T_2 ορίζεται πλήρως από το τι γίνεται σε αυτές τις μελλοντικές δοκιμές, συμπεραίνουμε ότι η T_2 είναι ανεξάρτητη από την T_1. Συνεχίζοντας το συλλογισμό για τις $T_3, T_4 \ldots$ έχουμε ότι:

<u>Συμπέρασμα</u>: Οι τ.μ. $T_1, T_2, T_3, \ldots$ είναι ανεξάρτητες και ακολουθούν όλες την ίδια γεωμετρική κατανομή με παρ. p.

Αυτό οδηγεί στον ακόλουθο εναλλακτικό ορισμό της σ.δ. Bernoulli

1. Αρχίζουμε με μια ακολουθία ανεξάρτητων γεωμετρικών τ.μ. $T_1, T_2, \ldots$ με παράμετρο p, οι οποίες αποτελούν τους χρόνους μεταξύ των αφίξεων.

2. Σημειώνουμε μια επιτυχία (άφιξη) τις χρονικές στιγμές $T_1, T_1+T_2, T_1+T_2+T_3, \ldots$

1.2.3 Ο χρόνος της k-στής άφιξης

Προφανώς έχουμε ότι: $Y_k = T_1 + T_2 + \dots + T_k$, το άθροισμα k ανεξάρτητων, γεωμετρικά κατανεμημένων τ.μ. με την ίδια παράμετρο p.

- Η μέση τιμή και η διασπορά της Y_k είναι:

$$E[Y_k] = E[T_1] + \dots + E[T_k] = \frac{k}{p}$$

$$var(Y_k) = var(T_1) + \dots + var(T_k) = \frac{k(1-p)}{p^2}$$

- Η σ.π. της Y_k είναι:

$$P_{Y_k}(t) = \binom{t-1}{k-1} p^k (1-p)^{t-k}, \quad t = k, k+1, \dots$$

: κατανομή Pascal τάξης k.

Πράγματι, για $t \geq k$, το γεγονός $\{Y_k = t\}$ (η k-στή επιτυχία έρχεται στην δοκιμή t) συμβαίνει μόνο όταν και τα δυο επόμενα γεγονότα A & B συμβαίνουν:

(α) A: επιτυχία στη δοκιμή t

(β) B: ακριβώς $k-1$ επιτυχίες στις πρώτες $t-1$ δοκιμές

$$P(A) = p, \quad P(B) = \binom{t-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{t-k}$$

Επιπλέον, τα γεγονότα A & B είναι ανεξάρτητα καθώς το τι γίνεται στην t-στή δοκιμή δεν εξαρτάται από το τι έγινε στις πρώτες $t-1$ δοκιμές. Άρα,

$$P_{Y_k}(t) = P(Y_k = t) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \binom{t-1}{k-1} p^k (1-p)^{t-k}.$$

<u>Παράδειγμα</u>: Κάθε λεπτό ενός παιχνιδιού μπάσκετ, ο Χρήστος κάνει ένα φάουλ με πιθ. p (ανεξάρτητα από λεπτό σε λεπτό). Ο Χρήστος φεύγει από το παιχνίδι μετά το 6ο φάουλ και θα παίξει 30 λεπτά αν κάνει κάτω από 6 φάουλ. Ποια η συνάρτηση πιθανότητας του χρόνου που μένει στο παιχνίδι;

— Μοντελοποιούμε τα φάουλ ως μια σ.δ. Bernoulli με παράμετρο p. Ο χρόνος, Z, που ο Χρήστος μένει στο παιχνίδι ισούται με Y_6 (= χρόνος μέχρι το 6ο φάουλ) εκτός αν $Y_6 > 30$ οπότε $Z = 30$, η διάρκεια του παιχνιδιού.

Δηλαδή $Z = \min\{Y_6, 30\}$.

Προφανώς, η τ.μ. Y_6 ακολουθεί κατανομή Pascal τάξης 6.

$$P_{Y_6}(t) = \binom{t-1}{5} p^6 (1-p)^{t-6} \quad ; \quad t = 6, 7, 8, \ldots$$

Κατ' αρχάς, παρατηρούμε ότι η Z θα παρει τιμές μεταξύ 6 και 30

Για το πεδίο τιμών της μεταξύ 6 και 29, θα είναι

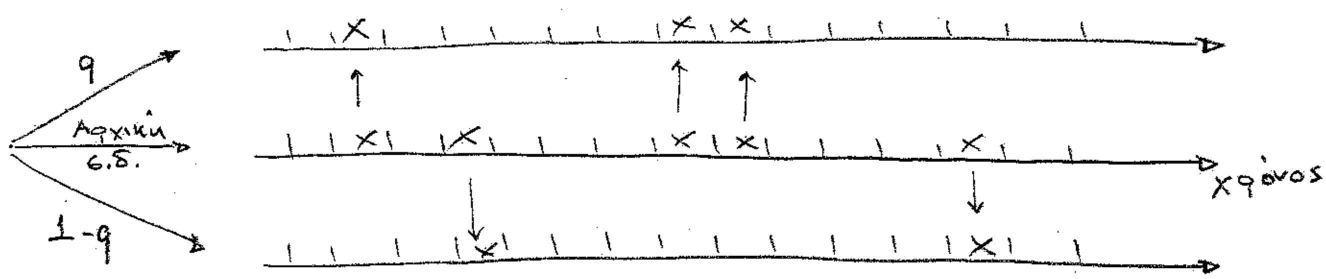
$$P_Z(z) = P(Z=z) = P(Y_6 = z) = \binom{z-1}{5} p^6 (1-p)^{z-6}, \quad z = 6, 7, \ldots, 29$$

Τέλος, $Z = 30$ αν και μόνο αν $Y_6 \geq 30$, συνεπώς:

$$P_Z(30) = P(Z=30) = P(Y_6 \geq 30) = 1 - P(Y_6 < 30) = 1 - \sum_{z=6}^{29} P_Z(z).$$

1.2.4 Διαίρεση και συγκερασμός (συγχώνευση) Σ.δ. Bernoulli (Splitting and Merging)

Διαίρεση μιας σ.δ. Bernoulli: Όποτε υπάρχει μια άφιξη, είτε την κρατάμε με πιθ. q, είτε την πετάμε με πιθ. $1-q$.



Υποθέτουμε ότι οι αποφάσεις να κρατήσουμε ή να πετάξουμε μία άφιξη είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

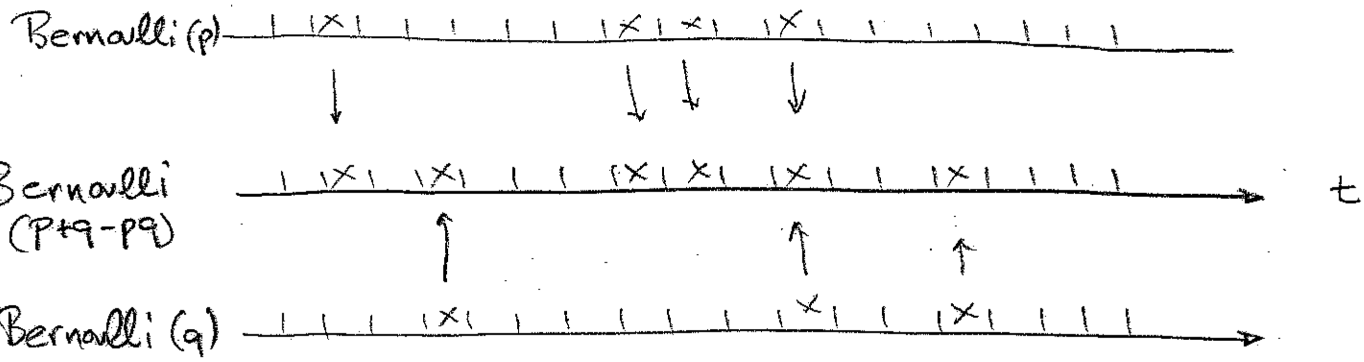
Η σ.δ. των αφίξεων που κρατάμε είναι προφανώς μία νέα σ.δ. Bernoulli με παράμετρο pq: Κάθε χρονικό διάστημα περιέχει μια άφιξη με πιθ. pq, ανεξάρτητα από το τι γίνεται στα υπόλοιπα διαστήματα.

Ομοίως η σ.δ. των αφίξεων που πετάμε είναι μια νέα σ.δ. Bernoulli με παράμετρο $p(1-q)$.

Συγκερασμός Δύο σ.δ. Bernoulli: Αντίστροφα, αρχίζοντας με δυο ανεξάρτητες σ.δ. Bernoulli με παραμέτρους p και q, αντίστοιχα, τις συγχωνεύουμε ως εξής:

Μία άφιξη καταγράφεται για τη νέα σ.δ. αν και μόνο αν υπάρχει άφιξη σε μία τουλάχιστον από τις δύο αρχικές σ.δ. (συμβαίνει με πιθ. $1-(1-p)(1-q) = p+q-pq$).

Καθώς τα χρονικά διαστήματα σε κάθε μία από τις αρχικές σ.δ. είναι ανεξάρτητα, διαφορετικά διαστήματα της νέας σ.δ. είναι επίσης ανεξάρτητα. Συνεπώς, η νέα σ.δ. είναι Bernoulli με παράμετρο $p+q-pq$:



<u>Χρησιμότητα</u>: Ένα κέντρο εξυπηρέτησης με δύο μηχανές βλέπει μια ροή από εργασίες για διεκπεραίωση και τη διαχωρίζει στέλνοντας κάθε εργασία τυχαία σε μια από τις δύο μηχανές.

1.2.5 Η Poisson προσέγγιση της Διωνυμικής

Ο αριθμός των επιτυχιών σε n ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli είναι μια διωνυμική τ.μ. με παραμέτρους n και p και μέση τιμή np. Μας ενδιαφέρει τι γίνεται καθώς το n μεγαλώνει και το p γίνεται όλο και πιο μικρό με τρόπο ώστε np: σταθερά. Αυτό συμβαίνει όταν περνάμε από το διακριτό σε συνεχή χρόνο.

Π.χ. − Αριθμός αεροπορικών ατυχημάτων σε μία μέρα: Υπάρχει μεγάλος αριθμός δοκιμών (πτήσεις), αλλά κάθε μία έχει πολύ μικρή πιθανότητα να καταλήξει σε ατύχημα.

- Αριθμός τυπογραφικών λαθών σε ένα βιβλίο: Υπάρχει μεγάλος αριθμός n λέξεων, αλλά μικρή πιθανότητα λάθους σε κάθε λέξη.

Poisson προσέγγιση της Διωνυμικής:

- Η Poisson τ.μ. με παράμετρο λ παίρνει μη-αρνητικές ακέραιες τιμές με πιθανότητα:

$$P_Z(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad k=0,1,2,3,\ldots$$

$$E[Z] = \lambda, \quad var(Z) = \lambda.$$

- Για κάθε μη αρνητικό ακέραιο k, η διωνυμική πιθανότητα

$$P_S(k) = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}p^k(1-p)^{n-k}$$

συγκλίνει στο $P_Z(k)$, όταν παίρνουμε το όριο $n \to +\infty$, με $p = \lambda/n$ κρατώντας το λ σταθερό.

- Γενικά η προσέγγιση είναι καλή όταν $\lambda = np$ με το n πολύ "μεγάλο" $(n \geq 100)$ και το p πολύ "μικρό" $(p \leq 0.01)$.

Απόδειξη: $P_S(k) = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\dfrac{\lambda^k}{n^k}\left(1-\dfrac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$

$$= \frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}.$$

Για σταθερό k, παίρνουμε το όριο καθώς $n\to\infty$. Καθε ένας απο τους όρους $n/n, \ldots, (n-k+1)/n \to 1$. Επίσης,

$\left(1-\lambda/n\right)^{-k} \to 1, \quad \left(1-\lambda/n\right)^{n} \to e^{-\lambda}.$ * Συνεπώς $P_S(k) \to e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$

* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x = e^{-1}, \quad x = n/\lambda \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{\lambda}{n}\right)^{n/\lambda} = e^{-1}.$

Παράδειγμα: Ο Gary Kasparov παίζει εναντίον 100 παικτών σκάκι σε μια μεγάλη εκδήλωση. Εκτιμάται (από παλαιότερες τέτοιες εκδηλώσεις) ότι κερδίζει κάθε παρτίδα με πιθανότητα 0.99. Ποιες οι πιθανότητες ότι θα κερδίσει 100, 98, 95 και 90 από τις παρτίδες;

Ορίζουμε την τ.μ. X ως τον αριθμό των παρτίδων που δεν κερδίζει ο Kasparov. Προφανώς,

$$X \sim \text{Διωνυμική}\,(n=100,\ p=0.01)$$

Επομένως, οι πιθανότητες που ψάχνουμε είναι:

$$P_X(0) = (1-0.01)^{100} = 0.366$$

$$P_X(2) = \frac{100!}{98!\,2!}\,0.01^2(1-0.01)^{98} = 0.185$$

$$P_X(5) = \frac{100!}{95!\,5!}\,0.01^5\,(1-0.01)^{95} = 0.0029$$

$$P_X(10) = \frac{100!}{90!\,10!}\,0.01^{10}\,(1-0.01)^{90} = 7.006 \times 10^{-8}$$

Οι Poisson προσεγγίσεις για τις παραπάνω πιθανότητες είναι: $(\lambda = np = 100 \times 0.01 = 1)$

$$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

$$P_Z(0) = e^{-1}\frac{1}{0!} = 0.368$$

$$P_Z(2) = e^{-1}\frac{1}{2!} = 0.184$$

$$P_Z(5) = e^{-1}\frac{1}{5!} = 0.00306$$

$$P_Z(10) = e^{-1}\frac{1}{10!} = 1.001 \times 10^{-8}$$

□

Παράδειγμα: Ένα πακέτο που αποτελείται από n σύμβολα μεταδίδεται μέσω ενθόρυβου καναλιού. Η πιθανότητα λάθους μετάδοσης κάθε συμβόλου είναι $p = 0.0001$, ανεξάρτητα από λάθη σε άλλα σύμβολα. Πόσο μικρό πρέπει να είναι το n ώστε η πιθανότητα λάθους μετάδοσης (δηλ. ύπαρξη τουλάχιστον ενός συμβόλου με λάθος στα n του πακέτου) να είναι μικρότερη από 0.001;

$S \triangleq$ πλήθος σφαλμάτων στο πακέτο $\sim B(n,p)$

Ζητώ $P(S \neq 0) = 1 - P(S=0)$

- Κάθε μετάδοση συμβόλου αποτελεί μια ανεξάρτητη δοκιμή Bernoulli. Επομένως η πιθανότητα θετικού αριθμού, S, σφαλμάτων στο πακέτο είναι:

$$1 - P(S=0) = 1 - (1-p)^n$$

αφού $S \sim$ Διωνυμική (n, p): $P_S(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $k = 0, 1, \dots, n$.

Θέλουμε $1 - (1 - 0.0001)^n < 0.001 \Rightarrow 0.9999^n > 0.999$

$n \ln(0.9999) > \ln(0.999)$

$$n < \frac{\ln(0.999)}{\ln(0.9999)} = 10.0045.$$

Με την Poisson προσέγγιση, έχουμε: $(\lambda = np = 0.0001 n)$

$P_S(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$, $k = 0, \dots$

$$1 - e^{-0.0001 n} < 0.001 \Rightarrow$$

$$n < \frac{-\ln(0.999)}{0.0001} = 10.005$$

Καθώς, n πρέπει να είναι ακέραιος, και με τις δύο μεθόδους προκύπτει $\underline{\underline{n < 10}}$. □

1.3 Η Σ.Δ. Poisson

Η σ.δ. Poisson μπορεί να θεωρηθεί ως μια συνεχούς χρόνου αντίστοιχη της σ.δ. Bernoulli: Θεωρούμε μια σ.δ. αφίξεων που εξελίσσεται σε συνεχή χρόνο με την έννοια ότι κάθε πραγματικός αριθμός t αποτελεί ένα πιθανό χρόνο άφιξης.

Ορίζουμε:

$$P(k,\tau) = P(\text{υπάρχουν ακριβώς } k \text{ αφίξεις στο χρονικό διάστημα μήκους } \tau)$$

και υποθέτουμε ότι αυτή η πιθανότητα είναι ίδια για όλα τα διαστήματα με την ίδια διάρκεια τ. Επίσης, ορίζουμε μια θετική παράμετρο λ ως τον ρυθμό αφίξεων (arrival rate) ή ένταση (intensity) της σ.δ.

Ορισμός της σ.δ. Poisson

Μια σ.δ. αφίξεων ονομάζεται Poisson με παράμετρο λ εάν έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

(α) Χρονική ομοιογένεια (Time-homogeneity) Η πιθανότητα $P(k,\tau)$ k αφίξεων είναι ίδια για όλα τα χρονικά διαστήματα διάρκειας τ.

(β) Ανεξαρτησία (Independence) Ο αριθμός των αφίξεων σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα είναι ανεξάρτητος από την ιστορία των αφίξεων έξω από το διάστημα.

(γ) Πιθανότητες μικρών διαστημάτων (Small Interval Probabilitie

Οι πιθ. $P(k,\tau)$ ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$P(0,\tau) = 1 - \lambda\tau + o(\tau)$$

$$P(1,\tau) = \lambda\tau + o_1(\tau) \;,$$

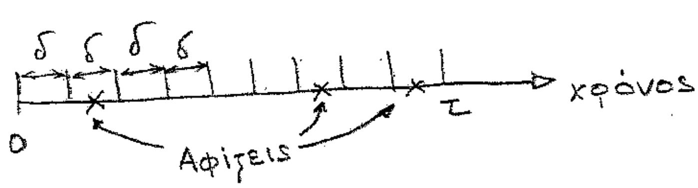
όπου $\lim_{\tau \to 0} \frac{o(\tau)}{\tau} = 0$ και $\lim_{\tau \to 0} \frac{o_1(\tau)}{\tau} = 0$.

Η πρώτη ιδιότητα δηλώνει ότι οι αφίξεις είναι εξίσου πιθανές για κάθε χρονική στιγμή. Είναι το ανάλογο της υπόθεσης ότι η πιθανότητα επιτυχίας, p, σε μια σ.δ. Bernoulli είναι σταθερή ως προς το χρόνο.

Η δεύτερη ιδιότητα είναι το ανάλογο της υπόθεσης ανεξαρτησίας των δοκιμών σε μια σ.δ. Bernoulli.

Η τρίτη ιδιότητα είναι σημαντική καθώς δηλώνει ότι για μικρό τ, η πιθανότητα μιας μοναδικής άφιξης είναι περίπου $\lambda\tau$, η πιθανότητα καμίας άφιξης είναι περίπου $1-\lambda\tau$. Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα δύο ή περισσοτέρων αφίξεων είναι $1 - P(0,\tau) - P(1,\tau) = -o(\tau) - o_1(\tau) \xrightarrow[\tau \to 0]{} 0$.

1.3.1. Σχέση Bernoulli και Poisson σ.δ.



- Πλήθος διαστημάτων: $n = \frac{\tau}{\delta}$
- Πιθανότητα επιτυχίας σε κάθε διάστημα $p = \lambda\delta$
- Αναμενόμενος αριθμός επιτυχιών: $np = \lambda\tau$

Έστω λοιπόν ένα χρονικό διάστημα διάρκειας τ το οποίο διαιρούμε σε τ/δ περιόδους διάρκειας δ, όπου δ είναι ένας πολύ μικρός αριθμός. • Η πιθανότητα περισσοτέρων της μιας αφίξεων σε κάθε περίοδο είναι αμελητέα (ιδιότητα (γ)).

• Διαφορετικές περίοδοι είναι ανεξάρτητες (ιδιότητα (β)).

• Επιπλέον, κάθε περίοδος έχει μια άφιξη με πιθ. $\approx \lambda\delta$ και μηδέν αφίξεις με πιθ $\approx 1-\lambda\delta$.

Επομένως, η συγκεκριμένη σ.δ. μπορεί να προσεγγιστεί από μία Bernoulli σ.δ. και η προσέγγιση γίνεται όλο και πιο ακριβής όσο μικρότερο γίνεται το δ. Άρα η πιθανότητα $P(k,\tau)$ k αφίξεων σε χρόνο τ προσεγγίζεται από τη διωνυμική πιθανότητα k επιτυχιών σε $n=\tau/\delta$ ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli με πιθ. επιτυχίας $p=\lambda\delta$ σε κάθε δοκιμή.

Κρατώντας τη διάρκεια τ σταθερή ελαττώνουμε το δ προς το 0. Παρατηρούμε ότι ο αριθμός n των περιόδων τείνει προς το άπειρο, ενώ το γινόμενο np παραμένει σταθερό και ίσο με $\lambda\tau$.

Κάτω από αυτές τις προϋποθέσεις, είδαμε ότι η διωνυμική σ.π. συγκλίνει στην Poisson σ.π. με παράμετρο $\lambda\tau$. Συνεπώς:

$$P(k,\tau)=\frac{(\lambda\tau)^k e^{-\lambda\tau}}{k!}, \quad k=0,1,2,\ldots$$

Το ανάπτυγμα κατά Taylor της $e^{-\lambda\tau}$ δίνει:

$$P(0,\tau) = e^{-\lambda\tau} = 1 - \lambda\tau + o(\tau^2)$$

$$P(1,\tau) = \lambda\tau e^{-\lambda\tau} = \lambda\tau - \lambda^2\tau^2 + o(\tau^3) = \lambda\tau + O(\tau^2),$$

σχέσεις που είναι συνεπείς με την ιδιότητα (γ).

Έχουμε ότι: $E[N_\tau] = \lambda\tau$, $var(N_\tau) = \lambda\tau$,

όπου N_τ: αριθμός αφίξεων στο χρονικό διάστημα μήκους τ.

Έστω τώρα T: ο χρόνος της πρώτης άφιξης υποθέτοντας ότι η σ.δ. αρχίζει σε χρόνο $t=0$. Παρατηρούμε ότι έχουμε $T>t$ αν και μόνο αν δεν υπάρχουν αφίξεις στο διάστημα $[0,t]$. Επομένως:

$$F_T(t) = P(T \leq t) = 1 - P(T>t) = 1 - P(0,t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0.$$

$$\therefore\ f_T(t) = \frac{dF_T(t)}{dt} = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0,$$

που δηλώνει ότι ο χρόνος μέχρι την πρώτη άφιξη κατανέμεται εκθετικά με παράμετρο λ.

Εναλλακτικός Ορισμός της σ.δ. Poisson:

1. Αρχίζουμε με μία ακολουθία ανεξάρτητων εκθετικών τ.μ. $T_1, T_2, T_3, \ldots$ με κοινή παράμετρο λ, που αποτελούν τους χρόνους μεταξύ των αφίξεων.
2. Καταγράφουμε μία άφιξη τις χρονικές στιγμές:
$T_1,\ T_1+T_2,\ T_1+T_2+T_3,\ \ldots$

1.3.4 Ο χρόνος της k-στής άφιξης, Y_k.

Η τ.μ. $Y_k = T_1 + T_2 + \cdots + T_k$ εκφράζεται ως το άθροισμα k ανεξάρτητων εκθετικά κατανεμημένων τ.μ.

- Η μέση τιμή και η διασπορά της Y_k είναι:

$$E[Y_k] = E[T_1] + \cdots + E[T_k] = k/\lambda.$$

$$var(Y_k) = var(T_1) + \cdots + var(T_k) = k/\lambda^2.$$

- Η σ.π.π. της Y_k είναι:

$$f_{Y_k}(y) = \frac{\lambda^k \cdot y^{k-1} \cdot e^{-\lambda y}}{(k-1)!} \quad : \text{κατανομή Erlang τάξης } k.$$

Για να βρούμε τη σππ f_{Y_k} της Y_k, θεωρούμε ότι για μικρό δ, το γινόμενο $\delta \cdot f_{Y_k}(y)$ είναι η πιθανότητα ότι η k-στή άφιξη συμβαίνει μεταξύ y και $y+\delta$.

Όταν το δ είναι πολύ μικρό, η πιθανότητα περισσοτέρων από μία αφίξεων στο διάστημα $[y, y+\delta]$ είναι αμελητέα.

Ανακεφαλαιωτικός Πίνακας τ.μ. που σχετίζονται με τη σδ. Poisson:

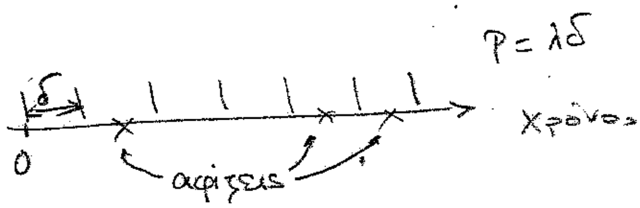
- Η Poisson τ.μ. με παράμετρο $\lambda\tau$: Έστω N_τ ο αριθμός των αφίξεων σε μια Poisson σδ. με ρυθμό λ, σε ένα χρονικό διάστημα διάρκειας τ. Έχουμε ότι:

$$P_{N_\tau}(k) = P(k,\tau) = \frac{(\lambda\tau)^k e^{-\lambda\tau}}{k!}, \quad k=0,1,2,\dots$$

$$E[N_\tau] = \lambda\tau, \quad var(N_\tau) = \lambda\tau.$$

- Η εκθετική τ.μ. με παρ. λ: Έστω T ο χρόνος έως την πρώτη άφιξη. Έχουμε ότι:

$$f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \ t \geq 0, \quad E[T] = 1/\lambda, \quad var(T) = 1/\lambda^2.$$



	Poisson	Bernoulli
Χρόνοι Αφίξεων	Συνεχείς	Διακριτοί
Σ.Π. του αριθμού των αφίξεων	Poisson	Διωνυμική
Κατανομή χρόνων μεταξύ αφίξεων	Εκθετική	Γεωμετρική
Ρυθμός αφίξεων	λ/μονάδα χρόνου	p/δοκιμή

Παράδειγμα : Λαμβάνουμε e-mail σύμφωνα με μια σ.δ. Poisson με ρυθμό $\lambda=0.2$ μηνύματα/ώρα. Ελέγχουμε το e-mail μας κάθε ώρα. Ποια η πιθανότητα να βρούμε 0 και 1 νέα μηνύματα; $P(k,\tau)=\frac{(\lambda\tau)^k e^{-\lambda\tau}}{k!}$

→ Πολύ απλά $P(0,1)=e^{-0.2}=0.819$

$$P(1,1)=0.2\,e^{-0.2}=0.164$$

Έστω ότι δεν ελέγξαμε το e-mail μας για μία ολόκληρη μέρα. Ποια η πιθανότητα ότι δεν λάβαμε κανένα νέο μήνυμα;

$$\to P(0,24)=e^{-0.2\cdot 24}=0.008294.$$

Παράδειγμα (Άθροισμα ανεξάρτητων Poisson τ.μ.)

Οι αφίξεις πελατών σε ένα κατάστημα μοντελοποιούνται ως μια Poisson σδ. με ρυθμό $\lambda=10$ πελάτες/λεπτό. Έστω M ο αριθμός των πελατών που φτάνουν μεταξύ 9:00 και 9:10. Επίσης έστω N ο αριθμός των πελατών που φτάνουν μεταξύ 9:30 και 9:35. Ποια η κατανομή του $M+N$;

- Παρατηρούμε ότι $M \sim \text{Poisson}(\mu=10\cdot 10=100)$ και ότι $N\sim \text{Poisson}(\nu=10\cdot 5=50)$. Επίσης M & N είναι ανεξάρτητες. Συνεπώς $M+N$ είναι Poisson με παράμετρο $\mu+\nu=150$.

Αυτό το παράδειγμα υποδηλώνει την εξής γενική αρχή:
Η πιθανότητα k αφίξεων σε ένα σύνολο χρόνων με συνολική διάρκεια τ, δίδεται πάντα από την $P(k,\tau)$, ακόμα και αν αυτό το σύνολο δεν αποτελεί ένα διάστημα.

Παράδειγμα: Στις ώρες αιχμής, μεταξύ 8 και 9 π.μ., τροχαία συμβαίνουν σύμφωνα με μια Poisson σ.δ. με ρυθμό $\mu = 5$ τροχαία/ώρα. Στις ώρες μεταξύ 9 και 11 π.μ., τροχαία συμβαίνουν σύμφωνα με μια άλλη ανεξάρτητη Poisson σ.δ. με ρυθμό $\nu = 3$ τροχαία/ώρα. Ποια η σ.π. του συνολικού αριθμού τροχαίων μεταξύ 8 και 11 π.μ.;

- Αυτός είναι το άθροισμα δύο ανεξάρτητων Poisson τ.μ. με παραμέτρους 5 και $3 \cdot 2 = 6$, αντίστοιχα. Αφού το άθροισμα ανεξάρτητων Poisson τ.μ. είναι επίσης Poisson, ο συνολικός αριθμός ατυχημάτων είναι Poisson τ.μ. με παράμετρο $5+6=11$.

1.3.2 Ανεξαρτησία και Έλλειψη Μνήμης

Η σ.δ. Poisson έχει ιδιότητες ανάλογες με αυτές της σδ. Bernoulli:

(α) Ανεξαρτησία μη-επικαλυπτόμενων χρονικών διαστημάτων:
Θεωρούμε δύο ξένα χρονικά διαστήματα $A = [0, 1] \cup [4, +\infty)$ και $B = [1.5, 3.6]$. Αν U και V είναι τ.μ. οι οποίες ορίζονται πλήρως από το τι συμβαίνει στο A και B, αντίστοιχα, τότε οι U και V είναι ανεξάρτητες τ.μ.

Αυτό είναι αποτέλεσμα της ιδιότητας (β) στον ορισμό της σ.δ. Poisson (σελ. 18).

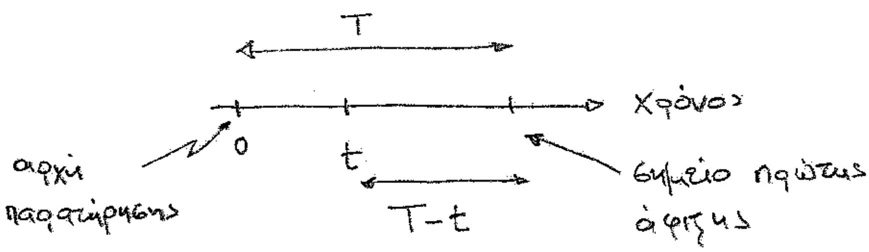
(β) Ιδιότητα νέας αρχής (fresh-start): Ως μία ειδική περίπτωση της προηγούμενης ιδιότητας, παρατηρούμε ότι ανεξάρτητη η ιστορία της σ.δ. μέχρι ένα χρόνο t είναι ανεξάρτητη από το μέλλον της σ.δ. Ακόμα, επικεντρώνοντας την προσοχή στο κομμάτι της σ.δ. Poisson που αρχίζει στο t, παρατηρούμε ότι κληρονομεί όλες τις ιδιότητες ορισμού (α-γ, σελ 18) της αρχικής σδ. Poisson.

Συνεπώς, το κομμάτι της σδ. Poisson που αρχίζει σε αυθαίρετο χρόνο $t>0$ αποτελεί πανομοιότυπο αντίγραφο της σ.δ. Poisson που αρχίζει σε χρόνο 0, και είναι ανεξάρτητο του κομματιού της σ.δ. για χρόνους πριν του t.

Δηλ., μπορούμε να πούμε ότι μια σ.δ. Poisson αρχίζει εκ νέου κάθε χρονική στιγμή.

(γ) <u>Έλλειψη μνήμης</u>: Έχουμε ήδη δει (στο βασικό μάθημα πιθανοτήτων) ότι η εκθετική σ.π.π. – που μοντελοποιεί τους χρόνους μεταξύ αφίξεων σε μια σδ. Poisson – διαθέτει την ιδιότητα έλλειψης μνήμης.

Πιο συγκεκριμένα, αν T είναι ο χρόνος της πρώτης άφιξης και μας πούνε ότι $T>t$, τότε ο υπόλοιπος χρόνος $T-t$ είναι εκθετικά κατανεμημένος με την ίδια παράμετρο λ:



Για την εκθετική κατανομή γνωρίζουμε ότι $P(T>a)=e^{-\lambda a}$, $a\geq 0$.

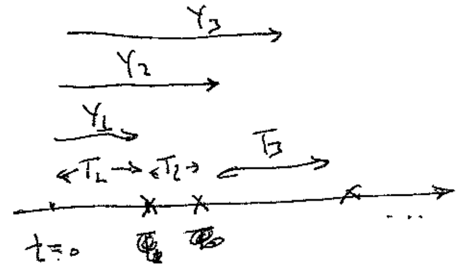
Συνεπώς, για θετικούς χρόνους s κ t,

$$P(T-t>s\,/\,T>t)=\frac{P(T>t+s,\,T>t)}{P(T>t)}=\frac{P(T>t+s)}{P(T>t)}=$$

$$=\frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}}=e^{-\lambda s}. \qquad \square$$

<u>Παράδειγμα</u>: Μπαίνετε σε μία τράπεζα και βρίσκετε και τους τρεις ταμίες να εξυπηρετούν άλλους πελάτες. Κανείς άλλος δεν βρίσκεται στην ουρά. Υποθέτοντας ότι οι χρόνοι εξυπηρέτησης των πελατών είναι ανεξάρτητοι και εκθετικά κατανεμημένοι, ποια η πιθανότητα ότι θα είστε οι τελευταίοι που θα φύγετε?

→ Η απάντηση είναι 1/3! Θεωρείστε τη χρονική στιγμή που κάποιος από τους 3 ταμίες αρχίζει να σας εξυπηρετεί. Λόγω της έλλειψης μνήμης της εκθετικής κατανομής, το υπόλοιπο των χρόνων εξυπηρέτησης των άλλων δύο πελατών είναι εκθετικά κατανεμημένο, όπως ακριβώς και ο δικός σας χρόνος εξυπηρέτησης. Επομένως, εσείς και οι υπόλοιποι δύο πελάτες έχετε την ίδια πιθανότητα να είστε οι τελευταίοι που θα φύγετε.



1.3.3 Χρόνοι μεταξύ αφίξεων

Ορίζουμε την τ.μ. Y_k: χρόνος της k-στής άφιξης.

Επίσης, αν T_k: ο k-στός χρόνος μεταξύ αφίξεων, τότε

$$T_1 = Y_1, \quad T_k = Y_k - Y_{k-1}, \quad k = 2, 3, 4, \dots$$

και αποτελεί το χρονικό διάστημα μεταξύ της (k-1)-στής και της k-στής άφιξης. Ισχύει ότι:

$$Y_k = T_1 + T_2 + \dots + T_k.$$

Είδαμε ήδη ότι $T_1 \sim$ εκθετική τ.μ. με παράμετρο λ.

Αρχίζοντας τώρα να παρατηρούμε τη σ.δ. τη στιγμή της πρώτης άφιξης T_1, το μέλλον είναι επίσης μια σ.δ. Poisson (fresh-start property). Επομένως, ο χρόνος έως την επόμενη άφιξη $\sim$ εκθετική (λ). Επίσης, το παρελθόν της σ.δ. (έως το χρόνο T_1) είναι ανεξάρτητο από το μέλλον (μετά το χρόνο T_1). Αφού η T_2 καθορίζεται πλήρως από το τι γίνεται στο μέλλον, οι T_1 & T_2 είναι και ανεξάρτητες. Με τον ίδιο συλλογισμό, καταλήγουμε ότι οι χρόνοι $T_1, T_2, T_3, \dots$ είναι ανεξάρτητες, εκθετικά κατανεμημένες τ.μ. με παρ. λ.

Επομένως, η κ-στή άφιξη συμβαίνει μεταξύ y και $y+\delta$ αν και μόνο αν τα επόμενα δύο γεγονότα συμβαίνουν:

(α) A: Υπάρχει μία άφιξη στο διάστημα $[y, y+\delta]$

(β) B: Υπάρχουν ακριβώς $k-1$ αφίξεις στο διάστημα $[0, y]$.

Οι πιθανότητες αυτών των δύο γεγονότων είναι:

$$P(A) \approx \lambda\delta \quad \text{και} \quad P(B) = P(k-1, y) = \frac{(\lambda y)^{k-1} e^{-\lambda y}}{(k-1)!}$$

Καθώς τα A & B είναι ανεξάρτητα, έχουμε:

$$\delta f_{Y_k}(y) \approx P(y \leq Y_k \leq y+\delta) \approx$$

$$\approx P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \approx \lambda\delta \frac{\lambda^{k-1} y^{k-1} e^{-\lambda y}}{(k-1)!}$$

$$\Rightarrow f_{Y_k}(y) = \frac{\lambda^k y^{k-1} e^{-\lambda y}}{(k-1)!}, \quad y \geq 0. \qquad \square$$

<u>Παράδειγμα</u>: Τηλεφωνήτε την υπηρεσία εξυπηρέτησης της Cosmote και πληροφορείστε ότι είστε ο 56ος πελάτης στη σειρά, εκτός του πελάτη που εξυπηρετείται αυτή τη στιγμή. Οι πελάτες εξυπηρετούνται και φεύγουν από την γραμμή σύμφωνα με μια σ.δ. Poisson με ένταση $\lambda = 2$ πελάτες/λεπτό. Ποιος είναι ο μέσος όρος αναμονής μέχρι να αρχίσει η δική σας εξυπηρέτηση, και ποια η πιθανότητα ότι θα πρέπει να περιμένετε περισσότερο από μία ώρα;

Σύμφωνα με την ιδιότητα έλλειψης μνήμης, ο εναπομείναντας χρόνος εξυπηρέτησης του πελάτη που εξυπηρετείται την παρούσα στιγμή είναι εκθετικά κατανεμημένος με παράμετρο $\lambda=2$.

Οι χρόνοι εξυπηρέτησης των 55 πελατών που είναι μπροστά στη σειρά είναι ανεξάρτητες εκθετικά κατανεμημένες τ.μ.

Συνεπώς, ο χρόνος αναμονής Y είναι τ.μ. με κατανομή Erlang τάξης 56 όπου:

$$E[Y] = \frac{56}{\lambda} = 28 \text{ λεπτά}.$$

Η πιθανότητα να περιμένουμε περισσότερο από μία ώρα δίνεται από

$$P(Y \geq 60) = \int_{60}^{+\infty} \frac{2^{56} y^{55} e^{-2y}}{55!} \, dy.$$

Η πιθανότητα αυτή μπορεί να προσεγγιστεί με χρήση του ΚΟΘ, καθώς η Y είναι το άθροισμα πολλών (56) iid τ.μ. με μέση τιμή $1/\lambda = 1/2$ και διασπορά $1/\lambda^2 = 1/4$.

Συνεπώς Y είναι κατά προσέγγιση κανονική τ.μ. με $\mu = 56/\lambda = 28$ κ διασπορά $\sigma^2 = 56/\lambda^2 = 56/4 = 14$.

$$Y \sim N(28, \sqrt{14})$$

$$\Rightarrow P(Y \geq 60) = 1 - P(Y \leq 60) = 1 - P\left(\frac{Y-28}{\sqrt{14}} \leq \frac{60-28}{\sqrt{14}}\right)$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{32}{\sqrt{14}}\right) \quad \square$$

1.3.5 Διαίρεση και Συγχώνευση σ.δ. Poisson.

Διαίρεση: Όποτε υπάρχει άφιξη, την κρατάμε με πιθανότητα p και την πετάμε με πιθ. $1-p$. Ως αποτέλεσμα προκύπτουν δυο σ.δ. Poisson με εντάσεις λp και $\lambda(1-p)$, αντίστοιχα.

Συγχώνευση: Αντίστροφα, αρχίζουμε με δυο ανεξάρτητες σδ Poisson με ρυθμούς λ_1 & λ_2 και τις συγχωνεύουμε καταγράφοντας μία άφιξη όποτε έχουμε άφιξη σε μία από τις δυο σ.δ. Η σ.δ. που προκύπτει είναι Poisson με ρυθμό $\lambda_1+\lambda_2$.
Επίσης, μία τυχαία άφιξη της συγχωνευμένης σ.δ. προέρχεται από την πρώτη σ.δ. με πιθ. $\lambda_1/(\lambda_1+\lambda_2)$ ή από την δεύτερη σ.δ. με πιθ. $\lambda_2/(\lambda_1+\lambda_2)$.

$$P(\text{αφιξη από } "\lambda_1" / 1 \text{ αφιξη}) = \frac{P(\text{αφιξη από } "\lambda_1")}{P(1 \text{ αφιξη})} \approx \frac{\lambda_1 \delta}{(\lambda_1+\lambda_2)\delta} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$$

Παράδειγμα Διαίρεσης: Ένα πακέτο που καταφθάνει σε ένα κόμβο τηλ. δικτύου είναι είτε ένα πακέτο με προορισμό αυτό τον κόμβο (αυτό γίνεται με πιθ. p) είτε ένα διερχόμενο πακέτο που πρέπει να μεταδοθεί σε κάποιον άλλο κόμβο (αυτό γίνεται με πιθ. $1-p$). Πακέτα καταφθάνουν σύμφωνα με μια σ.δ. Poisson με ρυθμό λ, Πακέτα καταφθάνουν ανεξάρτητα και καθένα είναι ένα τοπικό ή διερχόμενο πακέτο ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα και από την ώρα άφιξης. Σύμφωνα με τα παραπάνω, η σ.δ. των τοπικών πακέτων είναι Poisson με ένταση λp.

$$P(0 \text{ αφιξεις σε } \delta) \approx (1-\lambda_1\delta)(1-\lambda_2\delta) \approx 1-(\lambda_1+\lambda_2)\delta + O(\delta^2)$$

$= \lambda_1\lambda_2\delta^2$

Παράδειγμα Συγχώνευσης: Άνθρωποι που θέλουν να στείλουν γράμματα καταφθάνουν στο ταχυδρομείο σύμφωνα με μια σ.δ. Poisson με ρυθμό λ_1, ενώ άνθρωποι που θέλουν να στείλουν πακέτα καταφθάνουν κατά Poisson με ρυθμό λ_2. Η συγχωνευμένη σ.δ. που παρακολουθεί αφίξεις και των δύο τύπων αλληλογραφίας είναι Poisson με ρυθμό $\lambda_1+\lambda_2$

$= -2\lambda_1\lambda_2\delta^2$

Παράδειγμα. Competing Exponentials Ανταγωνιζόμενες Εκθετικές

Δύο εξαρτήματα έχουν ανεξάρτητες εκθετικά κατανεμημένες διάρκειες ζωής $T^{(1)}$ και $T^{(2)}$, με παραμέτρους λ_1 και λ_2, αντίστοιχα. Ποια η κατανομή του χρόνου Z που πρωτοπαρουσιάζεται βλάβη σε κάποιο από τα δύο εξαρτήματα;

$\rightarrow$ $Z = \min\{T^{(1)}, T^{(2)}\}$.

Για $z \geq 0$ έχουμε:

$$
\begin{aligned}
F_Z(z) &= P(\min\{T^{(1)}, T^{(2)}\} \leq z) \\
&= 1 - P(\min\{T^{(1)}, T^{(2)}\} > z) \\
&= 1 - P(T^{(1)} > z, T^{(2)} > z) \\
&= 1 - P(T^{(1)} > z) \cdot P(T^{(2)} > z) \\
&= 1 - e^{-\lambda_1 z} e^{-\lambda_2 z} = 1 - e^{-(\lambda_1+\lambda_2) z}
\end{aligned}
$$

$\therefore$ Z: εκθετική τ.μ. με παράμετρο $\lambda_1+\lambda_2$.

$\rightarrow$ Θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε τους χρόνους $T^{(1)}$ και $T^{(2)}$ ως τους χρόνους πρώτης άφιξης σε δύο ανεξάρτητες σ.δ. Poisson με ρυθμούς λ_1 και λ_2, αντίστοιχα. Αν συγχωνεύσουμε αυτές τις δύο σ.δ., ο χρόνος της πρώτης άφιξης θα είναι $\min\{T^{(1)}, T^{(2)}\}$. Άλλα ήδη γνωρίζουμε ότι η συγχωνευμένη σ.δ. είναι Poisson με ρυθμό $\lambda_1+\lambda_2$ και επομένως, ο χρόνος της πρώτης άφιξης, $\min\{T^{(1)}, T^{(2)}\}$ είναι εκθετικά κατανεμημένος με παράμετρο $\lambda_1+\lambda_2$.

<u>Γενίκευση</u>: Η συνολική σ.δ. αφίξεων που προκύπτει από τη συγχώνευση των αφίξεων "n" ανεξάρτητων σ.δ. Poisson με ρυθμούς $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ είναι Poisson με ρυθμό $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n$.

<u>Παράδειγμα</u>: Τρία εξαρτήματα έχουν ανεξάρτητες και εκθετικά κατανεμημένες διάρκειες ζωής με κοινή παράμετρο λ. Ποιος είναι ο μέσος χρόνος μέχρι να χαλάσει και το τελευταίο εξάρτημα;

Θεωρούμε τους χρόνους που κάθε εξάρτημα χαλάει ως τους χρόνους πρώτης άφιξης σε ανεξάρτητες σδ. Poisson. Στην αρχή, έχουμε τρία εξαρτήματα και η σδ έχει ένταση 3λ. Επομένως ο χρόνος T_1 της πρώτης βλάβης είναι εκθετική τ.μ. με παρ. 3λ και μέση τιμή $1/3\lambda$. Από τη στιγμή που ένα εξάρτημα χαλά και λόγω της έλλειψης μνήμης της εκθετικής κατανομής, οι υπόλοιπες διάρκειες ζωής των άλλων δύο εξαρτημάτων είναι και πάλι εκθετικά κατανεμημένες με παρ. λ. Έχουμε λοιπόν δύο σ.δ. Poisson που τρέχουν παράλληλα και ο χρόνος T_2 μέχρι την επόμενη βλάβη είναι εκθετικά κατανεμημένος με παρ. 2λ και μέση τιμή $1/2\lambda$. Με τον ίδιο συλλογισμό, $T_3 \sim$ εκθετική τμ. με παρ. λ.

Επομένως,
$$E[T_1 + T_2 + T_3] = \frac{1}{3\lambda} + \frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{\lambda}.$$

Καθώς οι T_1, T_2, T_3 είναι και ανεξάρτητες τ.μ. (έλλειψη μνήμης)

$$\begin{aligned} var(T_1 + T_2 + T_3) &= var(T_1) + var(T_2) + var(T_3) \\ &= \frac{1}{9\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

Πρέπει να σημειωθεί εδώ ότι το άθροισμα ενός μεγάλου αριθμού ανεξάρτητων σ.δ. αφίξεων (όχι απαραίτητα Poisson) μπορεί να προσεγγιστεί από μία σ.δ. Poisson με ρυθμό αφίξεων ίσο με το άθροισμα των επιμέρους ρυθμών. Οι συνιστώσες σ.δ. πρέπει να έχουν μικρό ρυθμό αφίξεων σε σχέση με το συνολικό ώστε να μην επιβάλλουν τις δικές τους πιθανοτικές ιδιότητες στην συνολική σ.δ. αφίξεων.

Αυτό το γεγονός αποτελεί και την αιτία για την αφθονία σ.δ. Poisson στην πράξη. Πχ η τηλεφωνική κίνηση που δημιουργείται σε μια πόλη αποτελείται από πολλές συνιστώσες σ.δ. που η κάθε μια τους χαρακτηρίζει τις τηλεφωνικές κλήσεις που γίνονται από τον κάθε συνδρομητή. Οι συνιστώσες σ.δ. δεν είναι απαραίτητα Poisson. Παρόλα αυτά, η συνολική τηλεφωνική κίνηση μοντελοποιείται επακριβώς μέσω μιας σ.δ. Poisson.

Για τους ίδιους λόγους, τα τροχαία ατυχήματα σε μια πόλη, οι αφίξεις πελατών σε ένα κατάστημα, οι αφίξεις πακέτων σε ένα κόμβο δικτύου τείνουν να έχουν το χαρακτήρα μιας σ.δ. Poisson.

1.3.6 Το παράδοξο της τυχαίας εμφάνισης (Random Incidence Paradox)

Όπως είπαμε, οι αφίξεις μιας σ.δ. Poisson χωρίζουν τον άξονα των χρόνων σε μια ακολουθία από διαστήματα (interarrival intervals). Καθ'ένα από αυτά αρχίζει με μία άφιξη και τελειώνει τη χρονική στιγμή της επόμενης άφιξης.

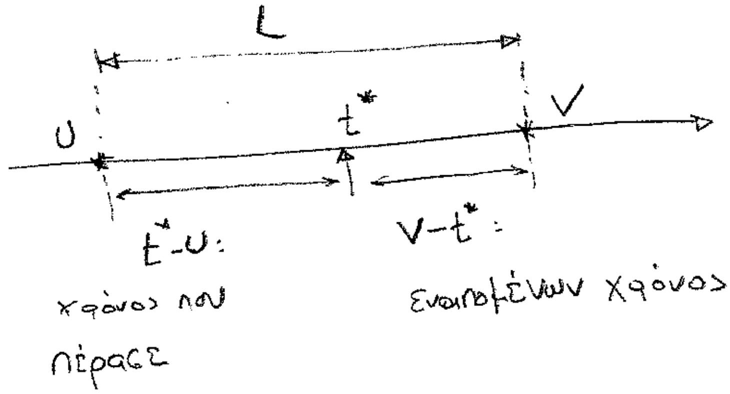
Αποδείξαμε ότι οι διάρκειες αυτών των διαστημάτων είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους εκθετικά κατανεμημένες τ.μ. με παρ. λ και μέση τιμή $1/\lambda$, όπου λ είναι ο ρυθμός αφίξεων της σ.δ.

Ας ορίσουμε τώρα μια χρονική στιγμή t^* και ας θεωρήσουμε το μήκος L του διαστήματος μεταξύ διαδοχικών αφίξεων στο οποίο ανήκει. Πχ θεωρούμε ένα άτομο που φτάνει στη στάση κάποια χρονική στιγμή t^* και μετρά το χρόνο από την προηγούμενη άφιξη του λεωφορείου έως την επόμενη. Η άφιξη αυτού του ατόμου συχνά αναφέρεται ως "τυχαία εμφάνιση" (random incidence) κάτι που είναι λίγο παραπλανητικό: t^* είναι μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή, όχι μια τυχαία μεταβλητή.

Θεωρούμε ότι η σ.δ. Poisson έχει αρχίσει να τρέχει εδώ και πολύ καιρό (t^* πολύ μεγάλο) ώστε να έχει υπάρξει ήδη τουλάχιστον μία άφιξη και το L να είναι καλά ορισμένο.

Κάποιος μπορεί να σκεφτεί (λανθασμένα) ότι το L είναι το μήκος ενός "τυπικού" διαστήματος μεταξύ διαδοχικών αφίξεων και επομένως είναι εκθετικά κατανεμημένο.

Στη συνέχεια δείχνουμε ότι το L ακολουθεί κατανομή Erlang τάξης 2.



Εστω $[U,V]$ το διαστημα όπου ανήκει το t^*, ώστε $L=V-U$. Δηλαδή, U είναι η χρονική στιγμή της πρώτης άφιξης πριν το t^* και V είναι η στιγμή της πρώτης άφιξης μετά το t^*. Μοιράζουμε το L σε δύο μέρη:

$$L=(t^*-U)+(V-t^*),$$

όπου t^*-U είναι ο χρόνος που πέρασε από την τελευταία άφιξης και $V-t^*$ είναι ο εναπομένων χρόνος έως την επόμενη. Προφανώς, το t^*-U καθορίζεται απο το παρελθόν της σ.δ. (πριν το t^*) ενώ το $V-t^*$ καθορίζεται από το μέλλον (μετά το t^*). Από την ιδιότητα της ανεξαρτησίας της σ.δ Poisson, οι τμ t^*-U και $V-t^*$ είναι ανεξάρτητες. Από την ιδιότητα έλλειψης μνήμης, η σ.δ. Poisson αρχίζει εκ νέου τη στιγμή t^* και επομένως η $V-t^*$ είναι εκθετική τ.μ με παράμετρο λ. Η τ.μ. t^*-U είναι επίσης εκθετική με παράμετρο λ. Αυτό γιατί αν τρέξουμε μια σ.δ. Poisson προς τα πίσω στο χρόνο, παραμένει Poisson καθώς οι χαρακτηριστικές της ιδιότητες δεν εξαρτώνται από τη φορά του χρονικού άξονα. Εναλλακτικά,

$$P(t^*-U>x)=P(\text{καμία άφιξη στο } [t^*-x,t^*])=P(0,x)=e^{-\lambda x},\ x\geq 0$$

Απο τον παραπάνω συλλογισμό φαίνεται ότι το L είναι το άθροισμα δυο ανεξάρτητων εκθετικά κατανεμημένων τ.μ. με παρ λ και επομένως ακολουθεί κατανομή Erlang τάξης 2. με μέση τιμή $2/\lambda$.

Συμπέρασμα: Αν και τα χρονικά διαστήματα μεταξύ διαδοχικών αφίξεων έχουν μέση διάρκεια $1/\lambda$ μονάδες χρόνου, ένας παρατηρητής που φτάνει μια αυθαίρετη χρονική στιγμή είναι πιο πιθανό να πέσει σε ένα μεγάλο τέτοιο διάστημα παρά σε ένα μικρό. Ως συνέπεια, η μέση διάρκεια του διαστήματος που βλέπει ο παρατηρητής είναι μεγαλύτερη, δηλ. $2/\lambda$.

Παράδειγμα: Τυχαία εμφάνιση σε μια σ.δ αφίξεων (μη-Poisson)

Λεωφορεία φτάνουν στη στάση τακτικά κάθε ώρα και 15 λεπτά μετά την ώρα. Συνεπώς, οι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών αφίξεων εναλλάσσονται μεταξύ 15 και 45 λεπτών, με μέση τιμή τα 30 λεπτά.

Ένα άτομο φτάνει στη στάση σε μια τυχαία χρονική στιγμή (σε χρόνο ομοιόμορφα κατανεμημένο στην διάρκεια της ώρας). Συνεπώς, αυτό το άτομο πέφτει στο διάστημα διάρκειας 15 λεπτών με πιθανότητα 1/4 και στο διάστημα διάρκειας 45 λεπτών με πιθανότητα 3/4. Η αναμενόμενη διάρκεια του διαστήματος στο οποίο πέφτει ο παρατηρητής είναι

$$15 \times \frac{1}{4} + 45 \times \frac{3}{4} = 37.5 \text{ λεπτά}$$

που είναι σημαντικά μεγαλύτερη από 30 λεπτά.

$\square$

ΕΝΟΤΗΤΑ 2η : ΑΛΥΣΙΔΕΣ MARKOV

Σε αυτή την ενότητα θεωρούμε σ.δ. όπου το μέλλον εξαρτάται και μπορεί να προβλεφθεί μερικώς από το παρελθόν. Θα μελετήσουμε μοντέλα όπου η επίπτωση του παρελθόντος στο μέλλον συνοψίζεται από την έννοια της κατάστασης (state), η οποία μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου σύμφωνα με κάποια πιθανότητα. Θα επικεντρωθούμε σε μοντέλα διακριτού χώρου καταστάσεων και διακριτού χρόνου. Θέλουμε να αναλύσουμε τις πιθανοτικές ιδιότητες της ακολουθίας των τιμών των καταστάσεων.

Το εύρος των εφαρμογών αυτών των μοντέλων είναι τεράστιο: Περιλαμβάνει σχεδόν κάθε δυναμικό σύστημα του οποίου η εξέλιξη στο χρόνο περιέχει αβεβαιότητα, δεδομένου ότι έχουν οριστεί κατάλληλα οι καταστάσεις του συστήματος. Εφαρμογές: τηλεπικοινωνίες, αυτόματος έλεγχος, επεξεργασία σήματος, οικονομία, επίδοση συστημάτων, κ.α.

2.1. Μαρκοβιανές (σ.δ.) αλυσίδες σε διακριτό χρόνο (Discrete-time Markov chains).

Θα μελετήσουμε πρώτα Μαρκοβιανές αλυσίδες διακριτού χρόνου όπου η κατάσταση (state) αλλάζει σε διακριτές χρονικές στιγμές, παραμετρισμένες από μια ακέραια παράμετρο "n".

Κάθε χρονικό βήμα "n", η αλυσίδα Markov βρίσκεται σε μια κατάσταση, X_n, όπου X_n ανήκει σε ένα πεπερασμένο σύνολο, το επονομαζόμενο σύνολο καταστάσεων της αλυσίδας (state space): $S = \{1, 2, \ldots, m\}$.

Η αλυσίδα Markov περιγράφεται βάσει των πιθανοτήτων μετάβασης (transition probabilities) P_{ij} από την κατάσταση i στην κατάσταση j:

$$P_{ij} = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) \quad ; \quad i, j \in S.$$

Η κύρια υπόθεση είναι ότι οποιαδήποτε πληροφορία για τις προγενέστερες καταστάσεις $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$ είναι περιττή όσον αφορά να συμβεί κάτι για το X_{n+1} εφόσων γνωρίζουμε την κατάσταση X_n της σ.δ. την τελευταία στιγμή "n". Μαθηματικά, αυτή η Μαρκοβιανή ιδιότητα (Markov Property) λέει ότι:

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = P_{ij},$$

για κάθε n, κάθε $i, j \in S$ και κάθε πιθανή ακολουθία $i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}$ προηγούμενων καταστάσεων.

Δηλαδή, ο πιθανοτικός νόμος της επόμενης κατάστασης X_{n+1} εξαρτάται από το παρελθόν μόνο μέσω της τιμής της παρούσας κατάστασης X_n.

Προφανώς, οι πιθανότητες μετάβασης P_{ij} είναι μη-αρνητικές και αθροίζονται στη μονάδα:

$$\sum_{j=1}^{m} P_{ij} = 1 \quad , \quad \forall i \in S.$$

Υποθέτουμε ότι οι πιθανότητες P_{ii} είναι γενικώς μη-μηδενικές, οπότε είναι δυνατό η επόμενη κατάσταση να είναι η ίδια με την παρούσα. Πρόκειται για περίπτωση μετάβασης από μια κατάσταση στον εαυτό της ("self-transition").

Ορισμός Μαρκοβιανών Μοντέλων

- Μια Μαρκοβιανή αλυσίδα καθορίζεται πλήρως προσδιορίζοντας:
  - (α) Το σύνολο των καταστάσεων $S = \{1, \ldots, m\}$
  - (β) Το σύνολο των δυνατών μεταβάσεων, δηλαδή εκείνα τα ζευγάρια (i,j) για τα οποία $P_{ij} > 0$,
  - (γ) τις αριθμητικές τιμές των P_{ij} που είναι θετικές
- Η Μαρκοβιανή αλυσίδα που ορίζεται από αυτό το μοντέλο είναι μια ακολουθία τ.μ. $X_0, X_1, X_2, \ldots$ που παίρνουν τιμές στο S και οι οποίες ικανοποιούν τη συνθήκη:

$$P(X_{n+1} = j \,/\, X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0) = P_{ij},$$

$\forall n$, $\forall (i,j) \in S$, $\forall$ πιθανή ακολουθία $i_0, \ldots, i_{n-1}$ προγενέστερων καταστάσεων.

Όλα τα στοιχεία μιας Markovian αλυσίδας μπορούν να κωδικοποιηθούν στο λεγόμενο πίνακα μετάβασης της αλυσίδας (transition probability matrix), $m \times m$ με (i,j) στοιχείο το P_{ij}:

$$\underline{\underline{P}} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1m} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{m1} & P_{m2} & \cdots & P_{mm} \end{bmatrix}.$$

Αν γνωρίζαμε τον πίνακα $\underline{\underline{P}}$, γνωρίζαμε ουσιαστικά τα πάντα για την αλυσίδα.

Άλλος ένας πολύ χρήσιμος τρόπος περιγραφής της αλυσίδας Markov είναι μέσω του γραφήματος (transition probability graph) το οποίο έχει τις καταστάσεις (στοιχεία του S) ως κορυφές (nodes) και για κάθε δύο κορυφές i και j για τις οποίες $P_{ij}>0$, έχει μια ακμή (arc) που κατευθύνεται από το i στο j και έχει βάρος την πιθ. P_{ij}.

Παράδειγμα:

Ο Χρήστος παρακολουθεί το μάθημα των πιθανοτήτων και κάθε βδομάδα μπορεί είτε να είναι ενημερωμένος (up-to-date) είτε να έχει μείνει πίσω (behind). Αν είναι ενημερωμένος μια δεδομένη εβδομάδα, η πιθανότητα να είναι ενημερωμένος (ή να έχει μείνει πίσω) την επόμενη εβδομάδα είναι 0.8 (ή 0.2, αντίστοιχα). Αν είναι πίσω μια δεδομένη εβδομάδα, η πιθανότητα να είναι ενημερωμένος (ή να έχει μείνει πίσω) την επόμενη εβδομάδα είναι 0.6 (ή 0.4 αντίστοιχα).

Υποθέτουμε ότι αυτές οι πιθανότητες δεν εξαρτώνται από την κατάστασή του τις προηγούμενες εβδομάδες, επομένως το πρόβλημα έχει ακριβώς το χαρακτήρα μιας Markov αλυσίδας:

Εισάγουμε τις εξής καταστάσεις:

1: Ο Χρήστος είναι ενημερωμένος

2: -"- έχει μείνει πίσω

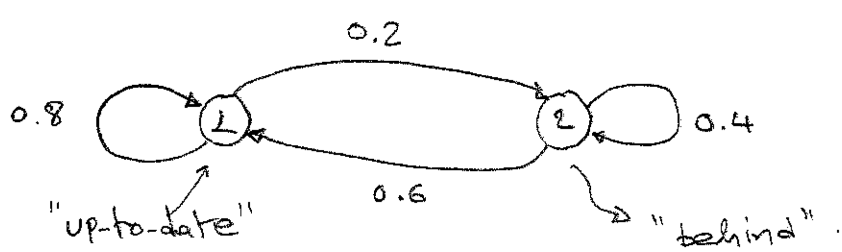
Τότε οι πιθανότητες μετάβασης είναι:

$$P_{11} = 0.8,\quad P_{12} = 0.2,\quad P_{21} = 0.6,\quad P_{22} = 0.4,$$

και ο πίνακας μετάβασης είναι:

$$P = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}.$$

Το γράφημα της αλυσίδας είναι:



Παράδειγμα: Μια μύγα κινείται κατά μήκος μιας ευθείας γραμμής σε ίσα βήματα. Κάθε χρονική στιγμή κινείται ένα βήμα προς τα αριστερά με πιθ. 0.3, ένα βήμα προς τα δεξιά με πιθ. 0.3 και μένει στη θέση της με πιθ. 0.4, ανεξάρτητα από τα προηγούμενα βήματα. Μια αράχνη καραδοκεί στις θέσεις 1 και m. Αν η μύγα βρεθεί εκεί, την πιάνει η αράχνη και η διαδικασία τερματίζεται. Θέλουμε να φτιάξουμε ένα μοντέλο Μαρκοβιανής αλυσίδας υποθέτοντας ότι η μύγα αρχίζει σε μία από τις θέσεις $2,\dots,m-1$.

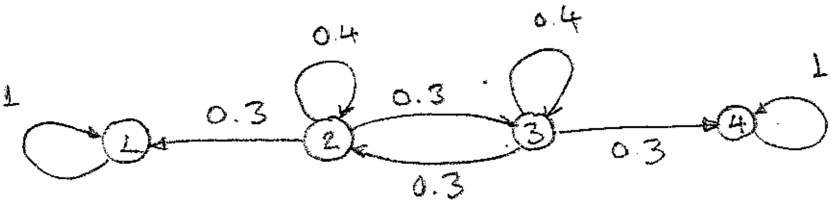
→ Εισάγουμε τις καταστάσεις $1,2,\dots,m$ να δηλώνουν τις αντίστοιχες θέσεις της μύγας πάνω στην ευθεία.

Οι μη-μηδενικές πιθανότητες μετάβασης είναι

$$P_{11}=1, \quad P_{mm}=1,$$

$$P_{ij}=\begin{cases} 0.3 & \text{αν } j=i-1 \text{ ή } j=i+1 \\ 0.4 & \text{αν } j=i \end{cases} \quad \text{για } i=2,\dots,m-1.$$

Τα αντίστοιχα γραφήματα και πίνακας μετάβασης της αλυσίδας φαίνονται παρακάτω για $m=4$.



	1	2	3	4
1	1	0	0	0
2	0.3	0.4	0.3	0
3	0	0.3	0.4	0.3
4	0	0	0	1

□ Σε μια αλυσίδα Markov, μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα μιας οποιασδήποτε ακολουθίας καταστάσεων. Προσέξτε την αναλογία με τη χρήση του πολλαπλασιαστικού νόμου σε σειριακά πιθανοτικά μοντέλα (δένδρα).

$$P(X_0=i_0, X_1=i_1,\dots,X_n=i_n) = P(X_0=i_0)\cdot P_{i_0i_1}\cdot P_{i_1i_2}\cdots P_{i_{n-1}i_n}$$

Απόδειξη: $P(X_0=i_0, X_1=i_1, \dots, X_n=i_n)$

$$= P(X_n=i_n / X_0=i_0,\dots, X_{n-1}=i_{n-1})\, P(X_0=i_0,\dots, X_{n-1}=i_{n-1})$$

$$= P_{i_{n-1}i_n} \cdot P(X_0=i_0,\dots, X_{n-1}=i_{n-1}),$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει με χρήση της ιδιότητας Markov. Επαναλαμβάνοντας για την $P(X_0=i_0,\dots, X_{n-1}=i_{n-1})$ κοκ, λαμβάνουμε την τελική έκφραση.

Αν γνωρίζουμε ότι η αρχική κατάσταση του συστήματος είναι $X_0=i_0$, τότε προφανώς:

$$P(X_1=i_1,\dots, X_n=i_n / X_0=i_0) = P_{i_0i_1} P_{i_1i_2} \cdots P_{i_{n-1}i_n}$$

Γραφικά, μία ακολουθία καταστάσεων προσδιορίζεται από μια ακολουθία ακμών στο γράφημα. Και η πιθανότητα αυτής της τροχιάς (ακολουθίας) δεδομένης της αρχικής κατάστασης δίδεται από το γινόμενο των πιθανοτήτων των ακμών της τροχιάς.

Παράδειγμα: Στο παράδειγμα της μύγας, έχουμε

$$P(X_1=2, X_2=2, X_3=3, X_4=4 / X_0=2) = P_{22}P_{22}P_{23}P_{34} = (0.4)^2(0.3)^2$$

Επίσης,

$$P(X_0=2, X_1=2, X_2=2, X_3=3, X_4=4) = P(X_0=2)\, P_{22}P_{22}P_{23}P_{34}$$

$$= P(X_0=2)\,(0.4)^2(0.3)^2$$

2.2 Πιθανότητες Μετάβασης ανωτέρας τάξης (n-step transition probabilities).

Σε πολλά προβλήματα απαιτείται ο υπολογισμός της πιθανότητας μιας κατάστασης σε κάποιο μεταγενέστερο χρόνο, δεδομένης της παρούσης κατάστασης:

$$r_{ij}(n) = P(X_n = j / X_0 = i).$$

Με λόγια, $r_{ij}(n)$ είναι η πιθανότητα ότι η κατάσταση μετά από n χρονικά βήματα θα είναι j, δεδομένου ότι η παρούσα κατάσταση είναι i.

Εξισώσεις Chapman-Kolmogorov:

$$\boxed{r_{ij}(n) = \sum_{k=1}^{m} r_{ik}(n-1)\cdot P_{kj}, \quad \text{για } n>1 \text{ και } \forall i,j, \quad \text{αρχίζοντας με } r_{ij}(1) = P_{ij}.}$$

<u>Απόδειξη</u>: $P(X_n=j / X_0=i) = \sum_{k=1}^{m} P(X_{n-1}=k / X_0=i) \cdot P(X_n=j / X_{n-1}=k, X_0=i)$

$P(B) = \sum_{k=1}^{m} P(A_k)\cdot P(B/A_k)$

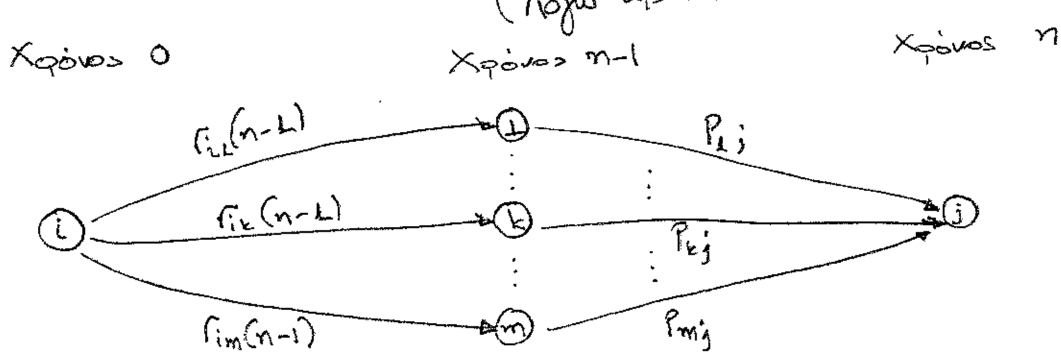
$B \equiv \{X_n=j / X_0=i\}$

$A_k \equiv \{X_{n-1}=k / X_0=i\}$

(Θεώρημα ολικής πιθανότητας)

$$= \sum_{k=1}^{m} r_{ik}(n-1)\cdot P_{kj}$$

(Λόγω της ιδιότητας Markov)



Με λόγια, οι εξισώσεις CK και το αντίστοιχο γράφημα λένε ότι, η πιθανότητα να είναι το σύστημα στην κατάσταση j τη χρονική στιγμή n είναι το άθροισμα των πιθανοτήτων $r_{ik}(n-1)\cdot p_{kj}$ των διαφόρων δυνατών τρόπων να φτάσουμε εκεί.

Εφαρμόζοντας τις εξισώσεις CK επανειλημμένα για $n=1$, παίρνουμε εύκολα ότι η πιθ. $r_{ij}(n)$ δεν είναι τίποτε άλλο από το (i,j) στοιχείο της n-στής δύναμης του πίνακα μετάβασης:

$$\boxed{r_{ij}(n) = (\underline{\underline{P}}^n)_{ij}\,.}$$

<u>Απόδειξη:</u>

Για $n=1$, ήδη έλαβε ότι $r_{ij}(1) = p_{ij} = (\underline{\underline{P}})_{ij}$.

Για $n=2$, οι εξισώσεις CK δίνουν:

$$r_{ij}(2) = \sum_{k=1}^{m} r_{ik}(1)\cdot p_{kj} = \sum_{k=1}^{m} p_{ik}\, p_{kj}$$: εσωτερικό γινόμενο της i-στής γραμμής με την j-στη στήλη του πίνακα $\underline{\underline{P}}$.

$$\therefore \quad r_{ij}(2) = (\underline{\underline{P}}^2)_{ij}$$

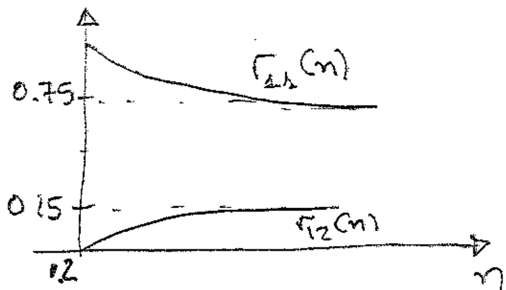
Ομοίως για $n=3,4,\ldots$

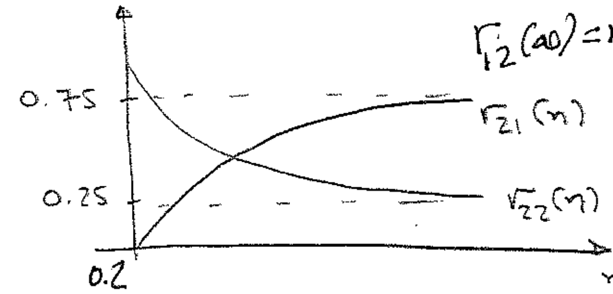
Μπορούμε να δούμε το $r_{ij}(n)$ ως το στοιχείο της i-στής γραμμής και της j-στής στήλης του λεγόμενου <u>πίνακα μετάβασης</u>

<u>τάξης n</u> (n-step transition probability matrix).

Παρακάτω φαίνονται οι πιθανότητες μετάβασης ανωτέρας τάξης για τα παραδείγματα του μαθητή και της μύγας.

$r_{11}(\infty)=r_{21}(\infty)$
$r_{12}(\infty)=r_{22}(\infty)$





Παράδειγμα του Μαθητή.

	UpD	B
UpD	0.8	0.2
B	0.6	0.4

$r_{ij}(1)$

. . .

.7504	.2496
.7488	.2512

$r_{ij}(4)$

.7501	.2499
.7498	.2502

$r_{ij}(5)$

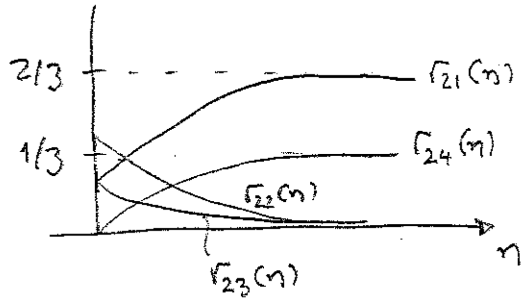
0.75	0.25
0.75	0.25

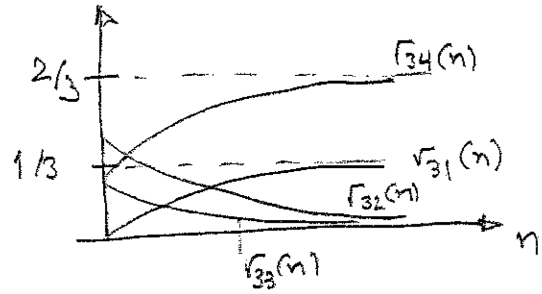
$r_{ij}(\infty)$

Παρατηρούμε ότι για $n \to \infty$, <u>κάθε $r_{ij}(n)$ συγκλίνει σε ένα όριο το οποίο δεν εξαρτάται από την αρχική κατάσταση</u>, δηλαδή, $\underline{r_{11}(\infty) = r_{21}(\infty)}$ και $\underline{r_{12}(\infty) = r_{22}(\infty)}$. Επομένως, στο συγκεκριμένο παράδειγμα, κάθε κατάσταση έχει μια θετική "<u>steady-state</u>" πιθανότητα να συμβεί στο μακρινό μέλλον. Η πιθανότητα $r_{ij}(n)$ εξαρτάται από την αρχική κατάσταση i όταν το n είναι μικρό, αλλά αυτή η εξάρτηση μειώνεται με το χρόνο.

Πολλά (όχι όλα!) πιθανοτικά μοντέλα που εξελίσσονται στο χρόνο έχουν αυτή τη συμπεριφορά: <u>Μετά από την πάροδο αρκετού χρόνου, η επίδραση της αρχικής κατάστασης γίνεται αμελητέα.</u>

Για το παράδειγμα της μύγας:





	1	2	3	4
1	1	0	0	0
2	.3	.4	.3	0
3	0	.3	.4	.3
4	0	0	0	1

$r_{ij}(1)$

1	0	0	0
2/3	0	0	1/3
1/3	0	0	2/3
0	0	0	1

$r_{ij}(\infty)$

Σε αυτό το παράδειγμα έχουμε διαφορετική συμπεριφορά. Το $r_{ij}(n)$ πάλι συγκλίνει, αλλά το όριο εξαρτάται από την αρχική κατάσταση και μπορεί να είναι 0 για ορισμένες καταστάσεις. Έχουμε δύο καταστάσεις οι οποίες χαρακτηρίζονται ως "absorbing" με την έννοια ότι επαναλαμβάνονται συνεχώς, μόλις τις επισκεφτούμε (καταστάσεις 1 & 4). Δοσμένου αρκετού χρόνου, είναι σίγουρο ότι μία από τις καταστάσεις 1 και 4 θα συμβούν. Συγχρόνως, η πιθανότητα ότι θα βρεθούμε σε μια από τις καταστάσεις 2 & 3 τείνει στο 0 για $n \to \infty$.

Από τα παραπάνω, είναι εμφανής η ανάγκη ταξινόμησης των διαφορετικών τύπων καταστάσεων σε μια αλυσίδα Markov

2.3 Ταξινόμηση Καταστάσεων

Είδαμε ήδη μέσω παραδειγμάτων ότι υπάρχουν διάφοροι τύποι καταστάσεων σε μια αλυσίδα Markov. Θα επικεντρωθούμε στους μηχανισμούς με τους οποίους γίνονται οι επισκέψεις στις καταστάσεις μιας αλυσίδας.

Ως πρώτο βήμα συγκεκριμενοποιούμε την έννοια της επίσκεψης μιας κατάστασης.

2.3.1 Επικοινωνία Καταστάσεων, Επισκέψεις, κ Επάνοδοι

Έστω δύο καταστάσεις i και j μιας αλυσίδας. Λέμε ότι η κατάσταση j είναι ~~προσιτή~~ προσβάσιμη (accessible) από την i (και γράφουμε "$i \to j$") αν υπάρχει $n \geq 1$ τέτοιο ώστε η πιθανότητα μετάβασης n-τάξης $P_{ij}(n) > 0$. Δηλαδή, υπάρχει θετική πιθανότητα να επισκεφτούμε την j ξεκινώντας από την i, μετά από κάποιον αριθμό χρονικών περιόδων.

Ισοδύναμα, $i \to j$ αν υπάρχει μια ακολουθία καταστάσεων $i, i_1, \ldots, i_{n-1}, j$, που αρχίζει από την i και καταλήγει στην j, στην οποία οι μεταβάσεις $(i, i_1), (i_1, i_2), \ldots, (i_{n-2}, i_{n-1})$, (i_{n-1}, j) όλες έχουν θετική πιθανότητα.

Γραφικά, υπάρχει ένα μονοπάτι πάνω στο γράφημα της αλυσίδας (ακολουθία ακμών, το τέλος της μιας είναι η αρχή της επομένης) που πηγαίνει από το i στο j.

Αν έχουμε $i \to j$ και $j \to i$, τότε λέμε ότι οι i και j επικοινωνούν και γράφουμε $i \leftrightarrow j$.

Έστω $A(i)$ το σύνολο των καταστάσεων που είναι προσιτές από την i. Λέμε ότι η i είναι "έμμονη" επαναληπτική (recurrent) αν για κάθε j που είναι προσιτή από την i, η i είναι επίσης προσιτή από την j. Δηλαδή, για κάθε $j \in A(i)$ έχουμε ότι $i \in A(j)$.

Η σχέση $\leftrightarrow$ επικοινωνίας είναι μια σχέση ισοδυναμίας και το σύνολο των καταστάσεων, S, μιας αλυσίδας χωρίζεται έτσι σε κλάσεις επικοινωνίας.

Μια αλυσίδα λέγεται ανάγωγη αν όλες οι καταστάσεις της είναι ισοδύναμες με την παραπάνω σχέση επικοινωνίας.

Όταν ξεκινάμε από μία έμμονη κατάσταση i, μπορούμε μόνο να επισκεφτούμε καταστάσεις $j \in A(i)$ οι οποίες είναι προσιτές από την i. Επομένως, από κάθε μελλοντική κατάσταση, υπάρχει θετική πιθανότητα να επιστρέψουμε στην i και δεδομένου αρκετού χρόνου, αυτό είναι σίγουρο ότι θα συμβεί. Επαναλαμβάνοντας τον ίδιο συλλογισμό, αν επισκεφτούμε μια έμμονη κατάσταση μια φορά, θα επανέλθουμε σε αυτή άπειρες φορές.

Μία κατάσταση λέγεται μεταβατική (transient) όταν δεν είναι έμμονη. Πιο συγκεκριμένα, υπάρχουν καταστάσεις $j \in A(i)$ για τις οποίες η i δεν είναι προσιτή από την j.

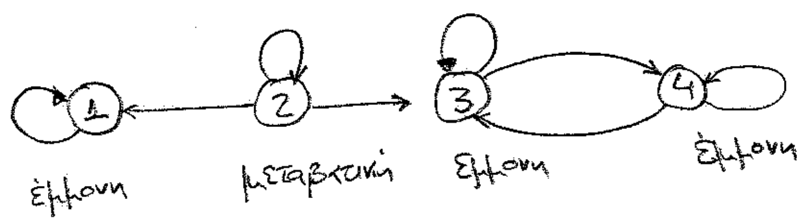
Μετά από κάθε επίσκεψη στην i, υπάρχει θετική πιθανότητα ότι το σύστημα θα μπει στην j. Δοσμένου αρκετού χρόνου αυτό θα συμβεί, και δεν θα ξαναγυρίσουμε ποτέ στην i.

Συνεπώς, μια μεταβατική κατάσταση είναι επισκέψιμη ένα πεπερασμένο αριθμό φορών.

Παράδειγμα

Σύνολο καταστάσεων προσιτών από την 1, 2, ..

$A(1) = \{1\}$
$A(2) = \{1, 2, 3, 4\}$
$A(3) = \{3, 4\}$
$A(4) = \{3, 4\}$



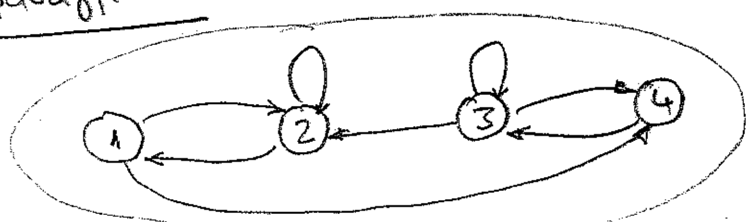
Ξεκινώντας από την 1, η μόνη προσιτή κατάσταση είναι η 1, και επομένως η 1 είναι έμμονη και αποτελεί και μια κλάση. Οι καταστάσεις 1, 3 και 4 είναι προσιτές από την 2, αλλά η 2 δεν είναι προσιτή από καμία από αυτές, επομένως η 2 είναι μεταβατική. Οι καταστάσεις 3 και 4 είναι προσιτές μόνο η μία από την άλλη (και τους εαυτούς τους) και είναι και οι δύο έμμονες, αποτελούν δε μια κλάση.

2.3.2 Υποδιαίρεση Συνόλου Καταστάσεων

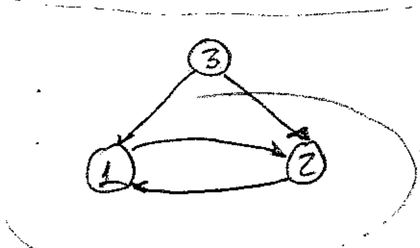
Markov Chain Decomposition

- Μια αλυσίδα Markov μπορεί να αναλυθεί σε μια ή περισσότερες κλάσεις επικοινωνίας συν πιθανώς ορισμένες μεταβατικές καταστάσεις.
- Μια έμμονη κατάσταση είναι προσιτή από όλες τις καταστάσεις της κλάσης της, αλλά όχι από καταστάσεις άλλων κλάσεων.
- Μια μεταβατική κατάσταση δεν είναι προσβάσιμη από καμμία έμμονη κατάσταση
- Τουλάχιστον μία (πιθανώς περισσότερες) έμμονες καταστάσεις είναι προσβάσιμες από μία δεδομένη μεταβατική κατάσταση.

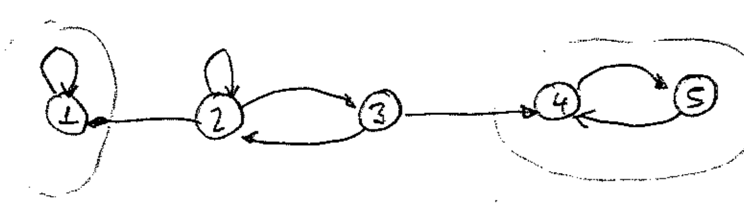
Παραδείγματα:



Μια κλάση επικοινωνίας



Μια κλάση επικοινωνίας (1 ,2) και μια μεταβατική κατάσταση (3)



Δυο κλάσεις επικοινωνίας (κλάση της 1 & κλάση των 4 ,5) και δύο μεταβατικές καταστάσεις.

Η αποσύνθεση αλυσίδων Markov αποτελεί ένα ισχυρό θεωρητικό εργαλείο που βοηθά στην κατανόηση της εξέλιξης των καταστάσεων της σ.δ. με το χρόνο. Ειδικότερα, βλέπουμε ότι:

(α) Όταν το σύστημα μπαίνει σε (ή γενικά από) μία κλάση έμμονων καταστάσεων, μένει μέσα στην κλάση. Καθώς όλες οι καταστάσεις μέσα στην κλάση επικοινωνούν μεταξύ τους, το πλήθος των επανόδων σε κάθε μία από αυτές είναι άπειρο.

(β) Αν η αρχική κατάσταση του συστήματος είναι μεταβατική, τότε η τροχιά των καταστάσεων μπορεί να περιέχει ένα αρχικό μέρος από μεταβατικές καταστάσεις και ένα τελικό μέρος από έμμονες καταστάσεις μιας κλάσης.

Για την κατανόηση (long-term) της συμπεριφοράς των αλυσίδων Markov σε βάθος χρόνου, είναι απαραίτητη η ανάλυση αλυσίδων που αποτελούνται από μια κλάση επικοινωνίας. Για τη short-term συμπεριφορά, απαιτείται η ανάλυση των μηχανισμών μέσω των οποίων από μια μεταβατική κατάσταση το σύστημα περνά σε μια κλάση έμμονων καταστάσεων.

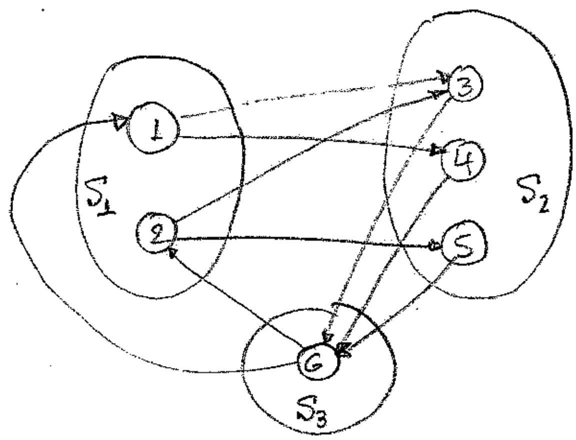
2.3.3 Περιοδικότητα Καταστάσεων

Μία κατάσταση i λέγεται περιοδική με περίοδο $d>1$ αν οποτεδήποτε $r_{ii}(n)>0$ έπεται ότι το d διαιρεί το n. Αν δεν υπάρχει τέτοιος ακέραιος d, τότε η κατάσταση λέγεται απεριοδική.

Πάνω στο γράφημα η περιοδικότητα μιας κατάστασης i με περίοδο d ισοδυναμεί με το ότι όλα τα μονοπάτια που ξεκινούν και τελειώνουν στο i έχουν μήκος πολλαπλάσιο του d (μήκος ενός μονοπατιού είναι το πλήθος των ακμών που το απαρτίζουν).

Μια κλάση επικοινωνίας ονομάζεται περιοδική αν οι καταστάσεις της μπορούν να ομαδοποιηθούν σε $d>1$ ξένα υποσύνολα $S_1, \dots, S_d$ έτσι ώστε οι μεταβάσεις από το ένα υποσύνολο οδηγούν στο άλλο:

$$\text{Αν } i \in S_k \text{ και } P_{ij} > 0, \text{ τότε } \begin{cases} j \in S_{k+1} & \text{αν } k=1, \dots, d-1 \\ j \in S_1, & \text{αν } k=d. \end{cases}$$



Δεδομένης μιας περιοδικής κλάσης επικοινωνίας, ενός θετικού χρόνου n, και μιας κατάστασης j στην κλάση, πρέπει να υπάρχει κάποια κατάσταση i έτσι ώστε $r_{ij}(n)=0$.

Ο λόγος είναι ότι, με βάση τον ορισμό της περιοδικότητας, οι καταστάσεις ομαδοποιούνται σε υποσύνολα $S_1, \dots, S_d$, και το υποσύνολο στο οποίο ανήκει η κατάσταση j μπορεί να προσεγγιστεί σε χρόνο n μόνο από τις καταστάσεις ενός μόνο υποσυνόλου.

Συνεπώς, ένας τρόπος ελέγχου απεριοδικότητας μιας κλάσης R, είναι η εύρεση ενός χρόνου $\bar{n} \geq 1$ και μιας κατάστασης $s \in R$ η οποία μπορεί να προσεγγιστεί σε χρόνο $\bar{n}$ από όλες τις αρχικές καταστάσεις στην R, δηλαδή, $P_{is}(\bar{n}) > 0 \quad \forall\, i \in R$.

Αντίστροφα, αν μια κλάση επικοινωνίας δεν είναι περιοδική, τότε υπάρχουν ένας χρόνος n και μια αδική κατάσταση S με τις παραπάνω ιδιότητες. Συνοψίζοντας:

Περιοδικότητα

Έστω μια κλάση επικοινωνίας R.

- Η κλάση ονομάζεται περιοδική αν οι καταστάσεις της μπορούν να ομαδοποιηθούν σε $d > 1$ ξένα υποσύνολα $S_1, \ldots, S_d$, ώστε όλες οι μεταβάσεις από το S_k οδηγούν στο S_{k+1} (ή στο S_1 αν $k = d$).
- Η κλάση είναι απεριοδική αν και μόνο αν υπάρχει χρόνος $\bar{n}$ και μια κατάσταση s στην κλάση, έτσι ώστε $P_{is}(\bar{n}) > 0 \quad \forall\, i \in R$.

2.3.4 Ασυμπτωτική Συμπεριφορά των πιθανοτήτων Μετάβασης (Steady-state Behavior).

Θα μελετήσουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά των πιθανοτήτων μετάβασης n-στής τάξης $r_{ij}(n)$ καθώς $n \to \infty$. Είδαμε ότι στο παράδειγμα του μαθητή, οι $r_{ij}(n)$ συγκλίνουν σε τιμές οι οποίες είναι ανεξάρτητες της αρχικής κατάστασης του συστήματος. Το ερώτημα που τίθεται είναι κατά πόσο αυτή η συμπεριφορά είναι τυπική;

Αν υπάρχουν δύο ή περισσότερες κλάσεις επικοινωνίας, είναι προφανές ότι οι οριακές τιμές των $r_{ij}(n)$ θα πρέπει να εξαρτώνται από την αρχική κατάσταση: Η επίσκεψη της j στο απώτερο μέλλον εξαρτάται από το αν η j ανήκει στην ίδια κλάση με την αρχική κατάσταση i.

Επομένως, θα μελετήσουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά σε αλυσίδες Markov οι οποίες αποτελούνται από μία κλάση επικοινωνίας έμμονων καταστάσεων συν πιθανόν κάποιες μεταβατικές καταστάσεις. Αυτό δεν είναι περιοριστικό καθώς ξέρουμε ότι από τη στιγμή που το σύστημα μπαίνει σε μία κλάση επικοινωνίας, μένει μέσα σε αυτή. Συνεπώς, ασυμπτωτικά η παρουσία όλων των υπολοίπων κλάσεων εκτός της συγκεκριμένης δεν έχει σημασία.

Ακόμα και σε αλυσίδες με μία μοναδική κλάση επικοινωνίας, οι $r_{ij}(n)$ μπορεί να μην συγκλίνουν. Ως ένα απλό παράδειγμα θεωρούμε μια κλάση με δύο καταστάσεις, 1 και 2, ώστε από την 1 μπορούμε να πάμε μόνο στην 2 και από την

2 στην 1, ($P_{12} = P_{21} = 1$). Τότε ξεκινώντας από μία κατάσταση, θα βρισκόμαστε στην ίδια μετά από ένα ζυγό αριθμό μεταβάσεων και στην άλλη μετά από ένα περιττό αριθμό μεταβάσεων. Αυτό που συμβαίνει εδώ είναι ότι η κλάση επικοινωνίας είναι περιοδική και για αυτές τις κλάσεις, οι $r_{ij}(n)$ γενικώς δεν συγκλίνουν.

Για κάθε κατάσταση j, οι πιθανότητες μετάβασης n-στης τάξης $r_{ij}(n)$ συγκλίνουν σε τιμές οι οποίες είναι ανεξάρτητες της αρχικής κατάστασης i για συστήματα που δεν περιέχουν πολλαπλές κλάσεις επικοινωνίας και/ή περιοδικές κλάσεις. Οι οριακές τιμές, π_j, έχουν την εξής έννοια:

$$\pi_j \approx P(X_n = j), \text{ για μεγάλα } n,$$

και ονομάζονται οριακές πιθανότητες της κατάστασης j (steady-state probability of j).

Ορισμός: Διάνυσμα κατανομής στις καταστάσεις

Αν $m = |S|$, τότε ένα διάνυσμα-γραμμή $\underline{\pi} = [\pi_1, \ldots, \pi_m]$ με $\pi_j \geq 0$ και $\sum_{j=1}^{m} \pi_j = 1$, λέγεται "κατανομή" πάνω στην αλυσίδα και το π_j παριστάνει την πιθανότητα η αλυσίδα να βρίσκεται στην κατάσταση j.

$\underline{\pi}_1(j) = \sum_{k=1}^{m} \underline{\pi}_0(k) P_{kj}$

Αν συμβολίσουμε με $\underline{\pi}_0$ την αρχική κατανομή, τότε η κατανομή σε χρόνο 1 δίνεται από $\underline{\pi}_1 = \underline{\pi}_0 \cdot \underline{\underline{P}}$, σε χρόνο 2 από $\pi_2 = \pi_1 \cdot \underline{\underline{P}} = \underline{\pi}_0 \cdot \underline{\underline{P}}^2$, και, σε χρόνο t από: $\boxed{\underline{\pi}_t = \underline{\pi}_0 \cdot \underline{\underline{P}}^t}$.

Θεώρημα Σύγκλισης σε Οριακή κατανομή
(Steady-state Convergence Thm).

Έστω μια αλυσίδα Markov με μία μοναδική κλάση επικοινωνίας, μη περιοδική. Οι καταστάσεις της αλυσίδας συνδέονται με οριακές πιθανότητες π_j που έχουν τις εξής ιδιότητες:

(a) $\lim_{n \to \infty} r_{ij}(n) = \pi_j, \quad \forall i, j$

(b) Οι οριακές πιθανότητες π_j αποτελούν την μοναδική λύση του συστήματος των εξισώσεων:

$$\pi_j = \sum_{k=1}^{m} \pi_k \cdot P_{kj}, \quad j = 1, \dots, m$$

$(\underline{\Pi} = \underline{\Pi} \cdot \underline{\underline{P}})$ σε μορφή πίνακα.

$$1 = \sum_{k=1}^{m} \pi_k .$$

(c) Ισχύει: $\pi_j = 0$, για όλες τις μεταβατικές καταστάσεις
$\pi_j > 0$, για όλες τις έμμονες καταστάσεις j.

Οι τιμές π_j, $j = 1, \dots, m$ αποτελούν την στατική κατανομή (stationary distribution) στο χώρο καταστάσεων της αλυσίδας.
Ο λόγος για αυτή την ονομασία είναι ότι αν η αρχική κατάσταση ορίζεται σύμφωνα με αυτή την κατανομή, δηλαδή
αν $P(X_0 = j) = \pi_j$, $j = 1, \dots, m$,
τότε χρησιμοποιώντας το θεώρημα ολικής πιθανότητας:

$$P(X_1=j)=\sum_{k=1}^{m} P(X_0=k)\cdot p_{kj} = \sum_{k=1}^{m} \pi_k\, p_{kj} = \pi_j ,$$

όπου η τελευταία εξίσωση ισχύει λόγω της σχέσης (β) του προηγούμενου θεωρήματος. Ομοίως προκύπτει ότι:

$$P(X_n=j)=\pi_j \quad \forall\, n \text{ και } j.$$

Συνεπώς, αν η αρχική κατάσταση του συστήματος ακολουθεί τη στατική κατανομή, όλες οι μεταγενέστερες καταστάσεις ακολουθούν αυτή την κατανομή.

Οι εξισώσεις:

$$\boxed{\pi_j=\sum_{k=1}^{m} \pi_k\, p_{kj} \quad , \quad j=1,\dots,m ,}$$

ονομάζονται εξισώσεις ισορροπίας (balance equations). Αποτελούν απλό επακόλουθο του μέρους (α) του θεωρήματος και των εξισώσεων Chapman-Kolmogorov. Πράγματι, δεδομένης της σύγκλισης των $r_{ij}(n)$ σε κάποια τιμή π_j, και παίρνοντας το όριο καθώς $n\to\infty$ των εξισώσεων CK:

$$r_{ij}(n)=\sum_{k=1}^{m} r_{ik}(n-1)\, p_{kj}$$

προκύπτουν οι εξισώσεις ισορροπίας. Οι εξισώσεις ισορροπίας αποτελούν ένα γραμμικό σύστημα εξισώσεων το οποίο μαζί με τη σχέση $1=\sum_{k=1}^{m}\pi_k$ μπορεί να επιλυθεί για να προκύψουν οι πιθανότητες της στατικής κατανομής, π_j, $j=1,\dots,m$.

Παράδειγμα: Έστω μια αλυσίδα Markov με δύο καταστάσεις και πιθανότητες μετάβασης (από το παράδειγμα του μαθητή)

$$P_{11}=0.8 \qquad P_{12}=0.2 \qquad : \qquad \underline{\underline{P}}=\begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$$
$$P_{21}=0.6 \qquad P_{22}=0.4$$

Οι εξισώσεις ισορροπίας παίρνουν τη μορφή

$$\underline{\Pi}=\underline{\Pi}\cdot\underline{\underline{P}} \quad \text{ή} \quad [\Pi_1 \;\; \Pi_2]=[\Pi_1 \;\; \Pi_2]\begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \Pi_1=\Pi_1 P_{11}+\Pi_2 P_{21}, \quad \Pi_2=\Pi_1 P_{12}+\Pi_2 P_{22}$$

$$\text{ή} \quad \Pi_1=0.8\cdot\Pi_1+0.6\,\Pi_2, \quad \Pi_2=0.2\,\Pi_1+0.4\,\Pi_2,$$

οι οποίες δίνουν και οι δυο τη σχέση:

$$\Pi_1=3\Pi_2 \,.$$

Αυτή είναι μια γενική ιδιότητα των εξ. ισορροπίας: Μία από αυτές εξαρτάται από τις υπόλοιπες εξισώσεις. Χρησιμοποιώντας και την σχέση

$$\Pi_1+\Pi_2=1,$$

έχουμε ότι $\Pi_1=0.75$ και $\Pi_2=0.25$. □

Παράδειγμα: Ένας αφηρημένος καθηγητής έχει δυο ομπρέλες τις οποίες χρησιμοποιεί για να πάει από το σπίτι στο γραφείο. Αν βρέχει και υπάρχει ομπρέλα διαθέσιμη εκεί που βρίσκεται, τη χρησιμοποιεί. Αν δεν βρέχει, πάντα ξεχνά να πάρει την ομπρέλα. Έστω ότι βρέχει με πιθανότητα p κάθε φορά που μετακινείται, ανεξάρτητα από τις υπόλοιπες. Ποια η οριακή πιθανότητα ότι θα βρέχει μια τυχαία μέρα;

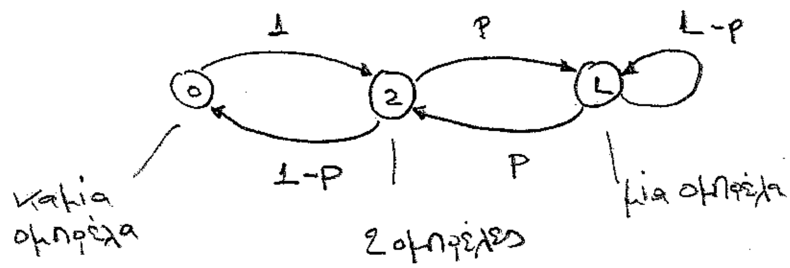
Μοντελοποιούμε αυτό το πρόβλημα χρησιμοποιώντας μια αλυσίδα Markov με τις ακόλουθες καταστάσεις:

Κατάσταση i: i ομπρέλες υπάρχουν στην παρούσα τοποθεσία, $i = 0, 1, 2$.

Ο πίνακας μετάβασης προκύπτει σύμφωνα με την εκφώνηση ως εξής:

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1-p & p \\ 1-p & p & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \to j \text{ στην παρούσα} \,/\, 0 \text{ στην προηγούμενη} \\ \to j \;\; -\!\!\shortparallel\!\!- \;\; / \, 1 \;\; -\!\!\shortparallel\!\!- \\ \to j \;\; -\!\!\shortparallel\!\!- \;\; / \, 2 \;\; -\!\!\shortparallel\!\!- \end{array}$$

Το γράφημα είναι:



Η αλυσίδα περιέχει μια μοναδική κλάση επικοινωνίας με τις τρεις καταστάσεις, η οποία είναι μη-περιοδική όταν $0 < p < 1$. Επομένως, εφαρμόζεται το θεώρημα σύγκλισης. Οι εξισώσεις ισορροπίας είναι

$$[\pi_0 \; \pi_1 \; \pi_2] = [\pi_0 \; \pi_1 \; \pi_2] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1-p & p \\ 1-p & p & 0 \end{bmatrix}$$

$$\pi_0 = (1-p)\pi_2, \quad \pi_1 = (1-p)\pi_1 + p\pi_2, \quad \pi_2 = \pi_0 + p\pi_1.$$

Από την δεύτερη εξίσωση παίρνουμε: $\pi_1 = \pi_2$ η οποία μαζί με την πρώτη και την $\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$ δίνουν:

$$\pi_0 = \frac{1-p}{3-p}, \quad \pi_1 = \frac{1}{3-p}, \quad \pi_2 = \frac{1}{3-p}$$

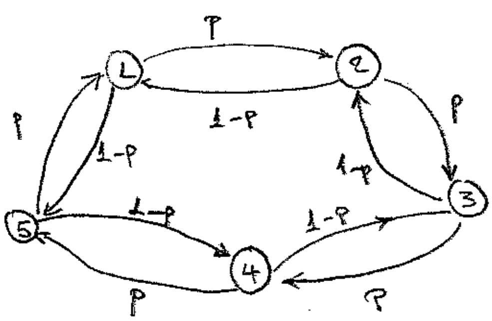
Επομένως, η οριακή πιθ. που ο καθηγητής βρίσκεται κάπου χωρίς ομπρέλα είναι $\pi_0 = \frac{1-p}{3-p}$, και η αντίστοιχη πιθανότητα να βρέξει είναι p

<u>Παράδειγμα</u>. Ένας καθηγητής δουλεύει σ' ένα κυκλικό κτίριο με m πόρτες, όπου m είναι περιττός, και δεν χρησιμοποιεί ποτέ την ίδια πόρτα δύο φορές συνεχόμενα. Αντίθετα, χρησιμοποιεί με πιθ. p $(1-p)$ την πόρτα που βρίσκεται δεξιά (αριστερά) αυτής που χρησιμοποίησε την τελευταία φορά. Ποια είναι η πιθανότητα ότι κάποια πόρτα θα χρησιμοποιηθεί μια μέρα στο μέλλον;

Εισάγουμε μια αλυσίδα Markov με τις ακόλουθες m καταστάσεις:

Κατάσταση i: Την τελευταία φορά χρησιμοποιήθηκε η πόρτα i, $i=1,\dots,m$.

Ο πίνακας μετάβασης και το γράφημα της αλυσίδας για $m=5$ είναι:



$$\underline{P} = \begin{bmatrix} 0 & p & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1-p \\ 1-p & 0 & p & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ p & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-p & 0 \end{bmatrix}$$

Υποθέτοντας ότι $0<p<1$, η αλυσίδα έχει μια μοναδική κλάση επικοινωνίας που είναι απεριοδική.

Οι εξισώσεις ισορροπίας είναι:

$$[\pi_1 \ \pi_2 \ \cdots \ \pi_m] = [\pi_1 \ \pi_2 \ \cdots \ \pi_m] \cdot \underline{P}$$

$$\Rightarrow \quad \pi_1 = (1-p)\pi_2 + p\pi_m$$

$$\pi_i = p\pi_{i-1} + (1-p)\pi_{i+1}, \quad i=2,\dots,m-1$$

$$\pi_m = (1-p)\pi_1 + p\pi_{m-1}.$$

Λόγω συμμετρίας, όλες οι πόρτες πρέπει να έχουν την ίδια οριακή πιθανότητα, και πράγματι η λύση

$$\pi_j = \frac{1}{m}, \quad j=1,2,\dots,m, \quad \sum_{j=1}^{m} \pi_j = 1$$

και ικανοποιεί τις εξισώσεις ισορροπίας, και αποτελεί την επιθυμητή οριακή κατανομή (λόγω της μοναδικότητας της λύσης από το Θεώρημα σύγκλισης)

Προσέξτε ότι αν $p=0$ ή $p=1$, η αλυσίδα έχει και πάλι μία μοναδική κλάση επικοινωνίας η οποία όμως είναι περιοδική με περίοδο m. Σε αυτή την περίπτωση οι $r_{ij}(n)$ δεν συγκλίνουν σε κάποιο όριο, καθώς οι πόρτες χρησιμοποιούνται με κυκλική σειρά. Ομοίως, αν το m είναι άρτιος, η κλάση είναι και πάλι περιοδική καθώς οι καταστάσεις μπορούν να ομαδοποιηθούν σε δυο υποσύνολα (αυτά με τις άρτιες και τις περιττές πόρτες), έτσι ώστε από το ένα υποσύνολο να πηγαίνουμε μόνο στο άλλο.

<u>Παράδειγμα</u>: Μια δεδομένη μέρα, μία μηχανή μπορεί να λειτουργεί ή να είναι χαλασμένη. Αν λειτουργεί, θα χαλάσει την επόμενη μέρα με πιθανότητα b ενώ θα εξακολουθήσει να λειτουργεί με πιθ. $1-b$. Αν χαλάσει μια δεδομένη μέρα, θα επιδιορθωθεί ώστε να λειτουργεί την επόμενη μέρα με πιθ. r, ενώ θα παραμείνει χαλασμένη με πιθ. $1-r$. Ποια η οριακή πιθανότητα ότι η μηχανή θα λειτουργεί μια δεδομένη μέρα;

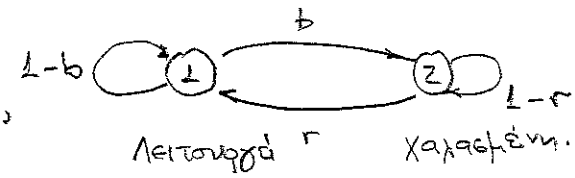
Εισάγουμε μια αλυσίδα Markov με τις εξής 2 καταστάσεις:

Κατάσταση 1: Η μηχανή λειτουργεί

Κατάσταση 2: Η μηχανή είναι χαλασμένη.

Έχουμε:

$$\underline{\underline{P}} = \begin{array}{c|cc} & \Lambda & X \\ \hline \Lambda & 1-b & b \\ X & r & 1-r \end{array}$$



Η αλυσίδα έχει μια κλάση απεριοδική όταν $0<b<1$ και $0<r<1$.

Οι εξισώσεις ισορροπίας είναι

$$\pi_1 = (1-b)\pi_1 + r\pi_2 \quad , \quad \pi_2 = b\pi_1 + (1-r)\pi_2$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} b\pi_1 = r\pi_2 \\ \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \pi_1 = \dfrac{r}{b+r} \\ \pi_2 = \dfrac{b}{b+r}. \end{array}$$

□

Το σύστημα στο προηγούμενο παράδειγμα έχει προφανώς την Markovian ιδιότητα: Η κατάσταση της μηχανής την επόμενη μέρα εξαρτάται αποκλειστικά μόνο από την κατάσταση της την παρούσα μέρα. Παρ'όλα αυτά, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα μαρκοβιανό μοντέλο ~~ακόμα και στην~~ περίπτωση όπου υπάρχει εξάρτηση των καταστάσεων σε περισσότερες των μία ημερών. Η γενική ιδέα είναι να εισάγουμε ορισμένες πρόσθετες καταστάσεις που κωδικοποιούν τι συμβαίνει στις προηγούμενες περιόδους.

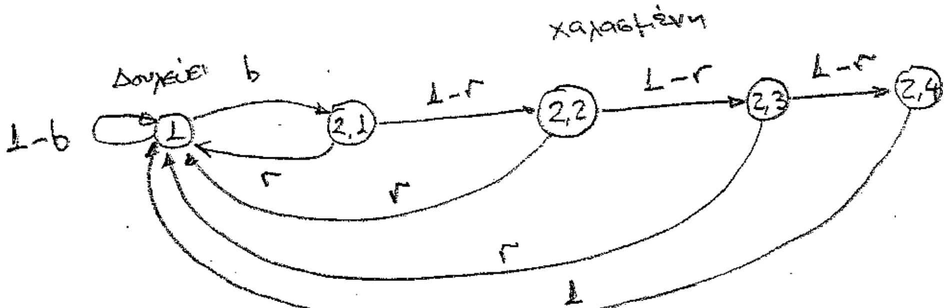
Παράδειγμα: Αν η μηχανή παραμένει χαλασμένη για ένα δοσμένο αριθμό ημερών, l, παρά τις προσπάθειες για επιδιόρθωση, αντικαθίσταται από μια νέα μηχανή.

Για να μοντελοποιήσουμε αυτό το σύστημα με μια μαρκοβιανή αλυσίδα, αντικαθιστούμε την κατάσταση 2, που αντιστοιχεί στη χαλασμένη μηχανή, με l καταστάσεις που προσδιορίζουν το πλήθος των ημερών που η μηχανή είναι χαλασμένη.

Αυτές οι καταστάσεις είναι:

Κατάσταση $(2,i)$: Η μηχανή είναι χαλασμένη για i μέρες, $i=1,2,\dots,\ell$.

Το γράφημα της αλυσίδας έχει ως εξής για $\ell=4$:



Η αλυσίδα έχει μια κλάση επικοινωνίας η οποία είναι απεριοδική.

$$\underline{\underline{P}} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2,1 \\ 2,2 \\ 2,3 \\ \vdots \\ 2,\ell-1 \\ 2,\ell \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2,1 & 2,2 & 2,3 & \cdots & 2,\ell \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1-b & b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ r & 0 & 1-r & 0 & \cdots & 0 \\ r & 0 & 0 & 1-r & \cdots & 0 \\ r & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ r & 0 & 0 & 0 & & 1-r \\ 1 & 0 & 0 & 0 & & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Οι εξισώσεις ισορροπίας είναι $[\pi_1\ \pi_{(2,1)} \cdots \pi_{(2,\ell)}] = [\pi_1\ \pi_{(2,1)} \cdots \pi_{(2,\ell)}]\cdot \underline{\underline{P}}$

$$\pi_1 = (1-b)\pi_1 + r\left(\pi_{(2,1)} + \dots + \pi_{(2,(\ell-1))}\right) + \pi_{(2,\ell)},$$

$$\pi_{(2,1)} = b\pi_1$$

$$\pi_{(2,i)} = (1-r)\,\pi_{(2,i-1)} \qquad i=2,3,\dots,\ell.$$

Οι τελευταίες δυο εξισώσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να εκφράσουν το $\pi_{(2,i)}$ συναρτήσει του π_1:

$\underline{i=2}$: $\pi_{2,2} = (1-r)\pi_{2,1} = (1-r)b\,\pi_1$

$\underline{i=3}$: $\pi_{23} = (1-r)\pi_{22} = (1-r)^2 b\,\pi_1$

$$\pi_{(2,i)} = (1-r)^{i-1}\, b\,\pi_1 \quad , \quad i=1,\dots,\ell.$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση $\pi_1 + \sum_{i=1}^{\ell} \pi_{(2,i)} = 1$, έχουμε ότι:

$$1 = \left(1 + b\sum_{i=1}^{\ell}(1-r)^{i-1}\right)\pi_1 = \left(1 + \frac{b\left(1-(1-r)^{\ell}\right)}{r}\right)\pi_1 ,$$

$$\therefore \quad \pi_1 = \frac{r}{r + b\left(1-(1-r)^{\ell}\right)} .$$

$\ell \downarrow \to (1-r)\uparrow \to 1-(1-r)^{\ell}\downarrow \to r+b()\downarrow \to \pi_1\uparrow$

Από τη στιγμή που έχουμε την ακριβή έκφραση για την π_1, χρησιμοποιώντας την

$$\pi_{(2,i)} = (1-r)^{i-1}\, b\, \pi_1$$

έχουμε επίσης ακριβείς εκφράσεις για όλες τις $\pi_{(2,i)}$, $i=1,\dots,\ell$.

2.3.5 Συχνότητα Επισκέψεων των καταστάσεων (Long-Term Frequency Interpretations).

Ως γνωστόν οι πιθανότητες συχνά ερμηνεύονται ως σχετικές συχνότητες σε μια άπειρη ακολουθία ανεξάρτητων δοκιμών. Οι οριακές πιθανότητες των καταστάσεων σε μία αλυσίδα Markov δέχονται μια παρόμοια ερμηνεία, παρά την έλλειψη ανεξαρτησίας.

Θεωρήστε ως παράδειγμα, μια αλυσίδα Markov ως μοντέλο για μία μηχανή η οποία στο τέλος μιας μέρας μπορεί να βρίσκεται σε δύο καταστάσεις: να λειτουργεί ή να είναι χαλασμένη. Κάθε φορά που χαλάει, επιδιορθώνεται αμέσως με κόστος 1€. Πως μπορούμε να υπολογίσουμε το αναμενόμενο (μέσο) κόστος επισκευής ανά μέρα; Μια δυνατότητα είναι να θεωρήσουμε την αναμενόμενη τιμή του κόστους επισκευής σε μία τυχαία μέρα μακριά στο μέλλον. Αυτή είναι απλά η οριακή πιθανότητα της κατάστασης να είναι χαλασμένη η μηχανή.

Εναλλακτικά, μπορούμε να θεωρήσουμε το συνολικό μέσο κόστος επισκευής για n μέρες, όπου το n είναι πολύ μεγάλο, και να το διαιρέσουμε με το n. Η διαίσθησή μας λέει ότι οι δυο προσεγγίσεις πρέπει να δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα. Η θεωρία στηρίζει αυτή τη διαίσθηση και έχουμε την εξής ερμηνεία των οριακών πιθανοτήτων κατάστασης:

Οριακές πιθανότητες καταστάσεων ως αναμενόμενες συχνότητες καταστάσεων: (Steady-state prob. as expected State frequencies).

Σε μια αλυσίδα Markov με μία κλάση επικοινωνίας μη περιοδική, οι οριακές πιθανότητες καταστάσεων π_j ικανοποιούν:

$$\pi_j = \lim_{n \to \infty} \frac{v_{ij}(n)}{n},$$

όπου $v_{ij}(n)$ είναι ο μέσος αριθμός επανόδων στην κατάσταση j στις πρώτες n μεταβάσεις, ξεκινώντας από την κατάσταση i.

Με βάση αυτή την ερμηνεία, π_j είναι το αναμενόμενο ποσοστό του χρόνου που το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση j.

Κάθε φορά που επισκεπτόμαστε την κατάσταση j, με πιθανότητα P_{jk} η επόμενη μετάβαση μας οδηγεί στην κατάσταση k.

Συνεπώς, η ποσότητα $\pi_j P_{jk}$ μπορεί να θεωρηθεί ως το αναμενόμενο ποσοστό των μεταβάσεων που οδηγούν το σύστημα από την κατάσταση j στην κατάσταση k:

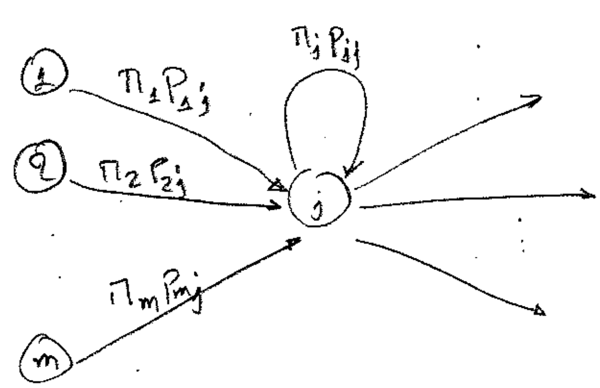
Αναμενόμενη συχνότητα Μετάβασης:
(Expected Frequency of a particular transition)

Θεωρείστε "n" μεταβάσεις σε μία αλυσίδα Markov με μία μη περιοδική κλάση επικοινωνίας, ξεκινώντας από κάποια δοσμένη αρχική κατάσταση. Έστω $q_{jk}(n)$ ο μέσος αριθμός των μεταβάσεων από την κατάσταση j στην κατάσταση k. Τότε, ανεξάρτητα από την αρχική κατάσταση, έχουμε ότι:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{q_{jk}(n)}{n} = \pi_j P_{jk}.$$

Η ερμηνεία με βάση τη συχνότητα των ποσοτήτων π_j και $\pi_j P_{jk}$ οδηγεί σε μία χρήσιμη ερμηνεία των εξισώσεων ισορροπίας. Η κατάσταση είναι ίση με j αν και μόνο αν υπάρχει κάποια μετάβαση που οδηγεί το σύστημα στην j. Συνεπώς, η αναμενόμενη συχνότητα επισκέψεων στην j, π_j, ισούται με το άθροισμα των αναμενόμενων συχνοτήτων $\pi_k P_{kj}$ των μεταβάσεων που οδηγούν στην j:

$$\pi_j = \sum_{k=1}^{m} \pi_k P_{kj}$$

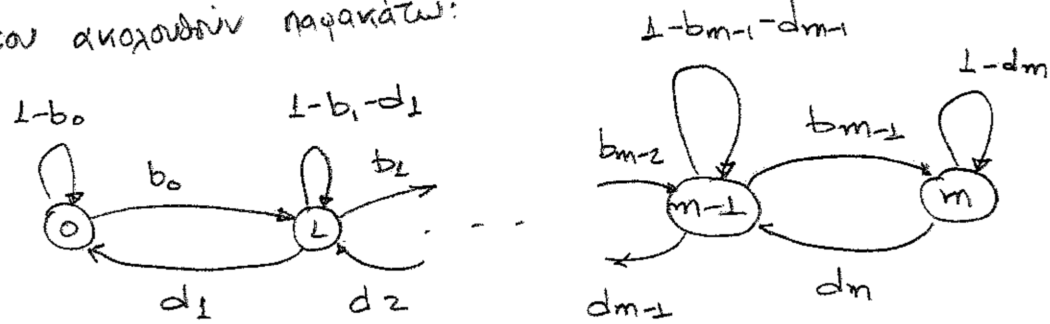


2.3.6 Σ.δ. Γεννήσεως - θανάτου

(Birth-Death Processes).

Μια σ.δ. γεννήσεως-θανάτου είναι μια αλυσίδα Markov στην οποία οι καταστάσεις διευθετούνται γραμμικά και μεταβάσεις σε μια κατάσταση μπορούν να υπάρχουν μόνο από την ίδια ή από την αμέσως γειτονική της κατάσταση. Προκύπτουν ως μοντέλα σε πολλές εφαρμογές και ιδιαίτερα στην θεωρία ουρών (queueing theory).

Το γράφημα και ορισμένοι βασικοί ορισμοί για σ.δ. γεννήσεως-θανάτου ακολουθούν παρακάτω:



$$P_{i,i+1} = b_i = P(X_{n+1} = i+1 \mid X_n = i) \quad : \text{ πιθανότητα "γέννησης" στην κατ. } i$$

$$P_{i,i-1} = d_i = P(X_{n+1} = i-1 \mid X_n = i) \quad : \quad -\|- \quad \text{"θανάτου"} \quad -\|-$$

Στις σ.δ. γεννήσεως-θανάτου οι εξισώσεις ισορροπίας μπορούν να απλοποιηθούν αρκετά. Πράγματι, ο πίνακας μετάβασης διαμορφώνεται

$$\underline{\underline{P}} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m-1 \\ m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & \cdots & m-1 & m \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1-b_0 & b_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ d_1 & 1-b_1-d_1 & b_1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 1-b_2-d_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1-b_{m-1}-d_{m-1} & b_{m-1} \\ 0 & 0 & 0 & & d_m & 1-d_m \end{bmatrix} \end{array}$$

Οι εξισώσεις ισορροπίας προκύπτουν ως:

$$[\pi_0\ \pi_1\ \pi_2 \dots \pi_{m-1}\ \pi_m] = [\pi_0\ \pi_1\ \pi_2 \dots \pi_{m-1}\ \pi_m] \cdot \underline{\underline{P}}$$

$$\Rightarrow \quad \pi_0 = (1-b_0)\pi_0 + d_1 \pi_1 \Rightarrow \pi_0 b_0 = \pi_1 \cdot d_1$$

$$\pi_1 = b_0 \pi_0 + (1-b_1-d_1)\pi_1 + d_2 \pi_2 \Rightarrow \pi_1 b_1 = \pi_2 d_2$$

$\vdots$

Και γενικά προκύπτει ότι:

$$\boxed{\pi_i b_i = \pi_{i+1} d_{i+1}, \quad i=0,1,\dots,m-1,}$$

οι λεγόμενες "τοπικές εξισώσεις ισορροπίας" (local balance equations).

$$\pi_1 = \frac{b_0}{d_1}\pi_0$$
$$\pi_2 = \frac{b_1}{d_2}\pi_1 = \pi_0 \frac{b_0 b_1}{d_1 d_2}$$

Προκύπτει εύκολα ότι:

$$\boxed{\pi_i = \pi_0 \frac{b_0 b_1 \cdots b_{i-1}}{d_1 \cdot d_2 \cdots d_i}, \quad i=1,\dots,m.}$$

Μαζί με την εξίσωση κανονικοποίησης $\sum_{i=1}^{m} \pi_i = 1$, μπορούμε να υπολογίσουμε τις οριακές πιθανότητες, π_j. Επομένως

Οι τοπικές εξισώσεις ισορροπίας μπορούν να προκύψουν και με βάση την ερμηνεία των σχετικών συχνοτήτων: Έστω δύο γειτονικές καταστάσεις, οι i και $i+1$. Για μια οποιαδήποτε ακολουθία καταστάσεων της αλυσίδας (τροχιά στο γράφημα), μια μετάβαση από την i στην $i+1$ πρέπει να ακολουθηθεί από μια μετάβαση από την $i+1$ στην i, πριν υπάρξει ξανά μετάβαση από την i στην $i+1$. Επομένως, η συχνότητα των μεταβάσεων από την i στην $i+1$, η οποία είναι ίση με $\pi_i b_i$, τη συχνότητα των μεταβάσεων από την $i+1$ στην i πρέπει να ισούται με $\pi_{i+1} \cdot d_{i+1}$:

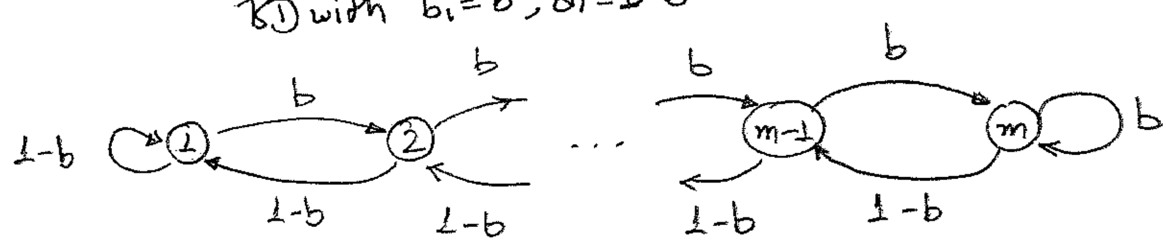
$$\pi_i b_i = \pi_{i+1} \cdot d_{i+1}. \quad \square$$

Παράδειγμα: Τυχαίος περίπατος με ανακλάσιμα φράγματα. (Random walk with reflecting barriers).

Ένα άτομο περπατά κατά μήκος μιας ευθείας γραμμής και σε κάθε χρονική περίοδο κάνει ένα βήμα δεξιά με πιθ. b ή ένα βήμα αριστερά με πιθ. $1-b$. Το άτομο αρχίζει σε κάποια από τις θέσεις $1,2,\dots,m$, αλλά όταν φτάνει στη θέση 0 (ή $m+1$), το βήμα του αυτόματα ανακλάται πίσω στη θέση 1 (ή m, αντίστοιχα). Με άλλα λόγια, υποθέτουμε ότι αν το άτομο βρίσκεται στις θέσεις 1 ή m θα παραμείνει εκεί με πιθ. $1-b$ και b, αντίστοιχα.

Εισάγουμε μία αλυσίδα Markov της οποίας οι καταστάσεις είναι οι θέσεις $1,\dots,m$. Το γράφημα είναι:

BD with $b_i=b$, $d_i=1-b$



Οι τοπικές εξισώσεις ισορροπίας είναι:

$$\pi_i \cdot b = \pi_{i+1}(1-b), \quad i=1,\dots,m-1.$$

Συνεπώς, $\pi_{i+1} = \rho\,\pi_i$, $\rho = \dfrac{b}{1-b}$, $i=1,\dots,m-1$.

$i=1: \pi_2=\rho\pi_1$, $i=2: \pi_3=\rho\pi_2=\rho^2\pi_1 \dots$

Ακόμα, $\pi_i = \rho^{i-1}\cdot\pi_1$, $i=1,\dots,m$

Αφού $1=\pi_1+\dots+\pi_m$, προκύπτει ότι:

$$1=\pi_1\left(1+\rho+\dots+\rho^{m-1}\right)$$

και τελικά

$$\boxed{\pi_i = \frac{\rho^{i-1}}{1+\rho+\dots+\rho^{m-1}}}, \quad i=1,\dots,m$$

Παρατηρούμε ότι για $\rho=1$ $(b=1/2)$, $\pi_i=1/m$ $\forall i$.

Παράδειγμα: Θεωρία Ουρών – Queueing Theory:

Birth-Death Markov Chains.

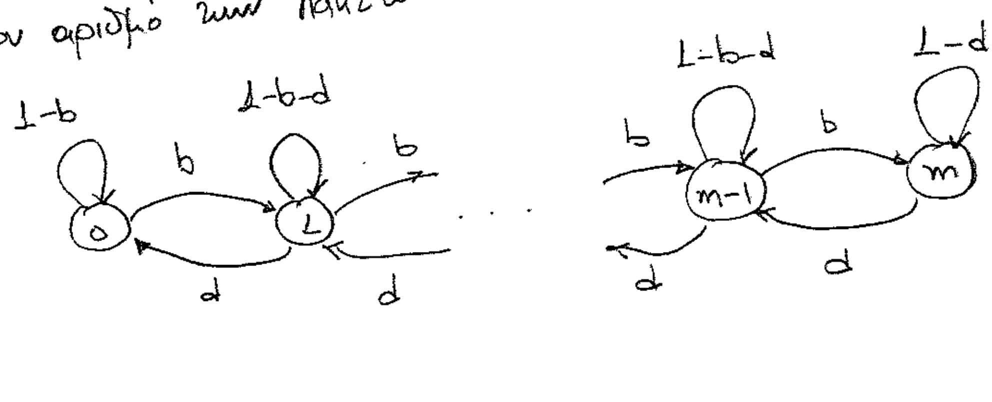
Πακέτα φτάνουν σε ένα κόμβο τηλεπικοινωνιακού δικτύου, όπου αποθηκεύονται προσωρινά σε έναν απομονωτή (buffer) πριν αναμεταδοθούν. Η χωρητικότητα αποθήκευσης του buffer είναι m: Αν υπάρχουν ήδη m πακέτα σε αυτόν, όποιο νέο πακέτο καταφθάσει πετιέται. Διακριτοποιούμε το χρόνο σε αρκούντως μικρές περιόδους και υποθέτουμε ότι σε κάθε περίοδο, το πολύ ένα γεγονός μπορεί να συμβεί το οποίο θα αλλάξει τον αριθμό των πακέτων στον buffer (είτε δηλαδή η άφιξη ενός πακέτου είτε η ολοκλήρωση της μετάδοσης ενός ήδη υπάρχοντος πακέτου). Πιο αναλυτικά, σε κάθε χρονική περίοδο μόνο ένα από τα ακόλουθα συμβαίνει:

(a) Άφιξη ενός νέου πακέτου με πιθ. $b>0$;

(b) Ολοκλήρωση μετάδοσης ενός υπάρχοντος πακέτου. Αυτό συμβαίνει με πιθ. $d>0$ αν υπάρχει τουλάχιστον ένα πακέτο στην ουρά ή με πιθ. 0 εάν δεν υπάρχει.

(c) Κανένα πακέτο δεν καταφθάνει και κανένα δεν μεταδίδεται. Αυτό συμβαίνει με πιθ. $1-b-d$ αν υπάρχει τουλάχιστον ένα πακέτο στο buffer, ή με πιθ. $1-b$ εάν δεν υπάρχει.

Εισάγουμε την αλυσίδα Markov με καταστάσεις $0, 1, \dots, m$, τον αριθμό των πακέτων στην ουρά. Το γράφημα είναι:



Οι τοπικές εξισώσεις ισορροπίας είναι:

$$\pi_i b = \pi_{i+1} d, \quad i=0,1,\dots,m-1.$$

Ορίζουμε $\rho = \frac{b}{d}$, οπότε

$$\pi_{i+1} = \rho \pi_i$$

και

$$\boxed{\pi_i = \rho^i \pi_0, \quad i=0,\dots,m-1.}$$

Χρησιμοποιώντας την $1 = \pi_0 + \dots + \pi_m$, έχουμε ότι:

$$1 = \pi_0 (1 + \rho + \dots + \rho^m),$$

και

$$\pi_0 = \begin{cases} \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+1}} & \text{αν } \rho \neq 1 \\ \frac{1}{m+1} & \text{αν } \rho = 1. \end{cases}$$

Συνεπώς, οι οριακές πιθανότητες προκύπτουν ως:

$$\pi_i = \begin{cases} \frac{\rho^i (1-\rho)}{1-\rho^{m+1}}, & \rho \neq 1 \\ \frac{1}{m+1}, & \rho = 1 \end{cases} \quad i=0,1,\dots,m.$$

Είναι ενδιαφέρον να δούμε τι συμβαίνει όταν το μέγεθος του buffer πλησιάζει το άπειρο, $m \to \infty$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(a) Έστω ότι $b<d$, δηλαδή $\rho < 1$. Σε αυτή την περίπτωση οι αφίξεις νέων πακέτων είναι λιγότερο πιθανές από τις αναχωρήσεις υπαρχόντων πακέτων. Αυτό αποτρέπει τον αριθμό των πακέτων στο buffer να μεγαλώνει, και οι πιθ. π_i μειώνονται με το i. Παρατηρούμε ότι καθώς $m \to \infty$, $1-\rho^{m+1} \to 1$ και

$$\Pi_i \rightarrow \rho^i (1-\rho), \quad \text{για κάθε } i.$$

Αυτές είναι οι οριακές πιθανότητες καταστάσεων για μια άπειρη ουρά.

(b) Έστω τώρα ότι $b>d$, ή $\rho>1$, δηλαδή οι αφίξεις νέων πακέτων είναι πιο πιθανές από τις αναχωρήσεις ήδη υπαρχόντων. Ο αριθμός των πακέτων στο buffer αυξάνεται και οι Π_i αυξάνονται με το i. Καθώς $n \rightarrow \infty$, $\Pi_i \rightarrow 0 \ \forall i$. Κάθε μια από τις άπειρες καταστάσεις της αλυσίδας Markov έχει μηδενική οριακή πιθανότητα και επομένως θεωρείται "μεταβατική". Ο αριθμός των πακέτων στην ουρά θα αυξηθεί στο άπειρο, και οποιαδήποτε κατάσταση θα συμβεί μόνο ένα πεπερασμένο αριθμό από φορές.

2.4 Πιθανότητες απορρόφησης και μέσος χρόνος απορρόφησης (Absorption probabilities and expected time to absorption).

Σε αυτή την ενότητα μελετούμε την short-term συμπεριφορά μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας, η οποία ξεκινά από μια μεταβατική κατάσταση. Ενδιαφερόμαστε για την πρώτη έμμονη κατάσταση στην οποία θα βρεθεί το σύστημα καθώς και για το χρόνο μέχρι να συμβεί αυτό.

Όταν μελετούμε τέτοιες ερωτήσεις, η μετέπειτα συμπεριφορά του συστήματος (αφού δηλαδή έχει επισκεφθεί μία έμμονη κατάσταση) δεν μας ενδιαφέρει. Μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι η έμμονη κατάσταση, k, είναι μια κατάσταση απορρόφησης (absorbing state) για την οποία ισχύει ότι:

$$P_{kk}=1 \quad , \quad P_{kj}=0 \quad \forall \; j\neq k.$$

Αν η αλυσίδα έχει μία και μοναδική κατάσταση απορροφήσεως k, η οριακή πιθανότητα σταθερής κατάστασης αυτής είναι ίση με 1, και το σύστημα την επισκέπτεται με πιθανότητα 1, αρχίζοντας από οποιαδήποτε αρχική κατάσταση. Αν υπάρχουν περισσότερες από μία καταστάσεις απορροφήσεως, η πιθανότητα ότι κάποια από αυτές θα συμβεί τελικά είναι επίσης 1, αλλά το ποια θα συμβεί είναι τυχαίο γεγονός η πιθανότητα του οποίου εξαρτάται από την αρχική κατάσταση του συστήματος.

Έστω τώρα μια συγκεκριμένη κατάσταση απορροφήσεως s. Ορίζουμε ως την <u>πιθανότητα απορροφήσεως</u> του συστήματος από την s ξεκινώντας από την i ως:

$$a_i \triangleq P(X_n \text{ τελικά ισούται με την κατ. απορ. } s \,/\, X_0=i).$$

Για μια αλυσίδα Markov όπου κάθε κατάσταση είναι είτε μεταβατική είτε απορροφήσεως, οι πιθανότητες απορροφήσεως, a_i, της αλυσίδας από την κατάσταση s ξεκινώντας από την i είναι οι μοναδικές λύσεις του γραμμικού συστήματος:

$$a_s=1,$$

$$a_i=0, \quad \text{για κάθε κατάσταση απορρόφησεως } i\neq s,$$

$$a_i=\sum_{j=1}^{m} p_{ij}\cdot a_j \;, \quad \text{για κάθε μεταβατική κατ. } i.$$

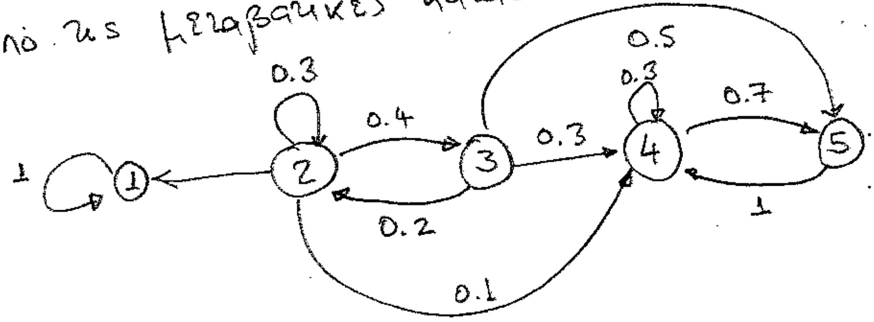
Οι εξισώσεις $a_s=1$ και $a_i=0$ (i: κατάσταση απορροφήσεως διαφορετική της s) είναι προφανείς από τον ορισμό τους.

Για τις υπόλοιπες, αν ονομάσουμε A το γεγονός $\{X_n$ τελικά ισούται με την κατάσταση απορροφήσεως $s\}$ και χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα ολικής πιθανότητας, έχουμε:

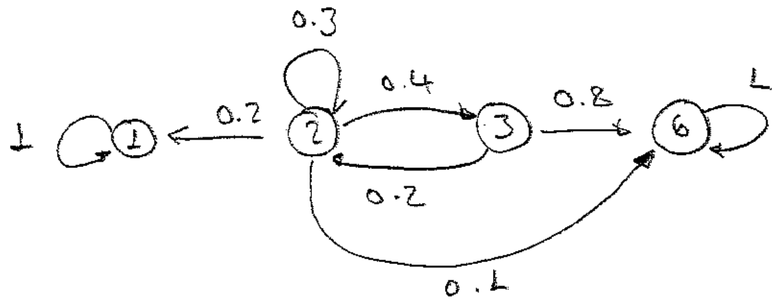
$$
\begin{aligned}
a_i &\triangleq P(A / X_0 = i) \\
&= \sum_{j=1}^{m} P(A / X_0 = i, X_1 = j) \cdot P(X_1 = j / X_0 = i) \quad (\text{ΘΟΠ}) \\
&= \sum_{j=1}^{m} P(A / X_1 = j) \cdot P_{ij} \quad (\text{Μαρκοβιανή ιδιότητα}) \\
&= \sum_{j=1}^{m} a_j \cdot P_{ij} \quad . \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Το επόμενο παράδειγμα δείχνει πως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την παραπάνω ανάλυση για να υπολογίσουμε την πιθανότητα εισόδου του συστήματος σε μία αναγωγή κλάση επικοινωνίας.

<u>Παράδειγμα</u>: Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα του σχήματος. Θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα ότι το σύστημα τελικά θα επισκεφθεί την κλάση επικοινωνίας $\{4,5\}$ ξεκινώντας από μία από τις μεταβατικές καταστάσεις.



Για τους σκοπούς του προβλήματος, οι πιθανές μεταβάσεις του συστήματος μέσα στην κλάση $\{4,5\}$ δε μας αφορούν. Επομένως, μπορούμε να θεωρήσουμε τις δύο καταστάσεις της κλάσης $\{4,5\}$ ως μία κατάσταση απορροφήσεως 6, οπότε το σύστημα παίρνει την ακόλουθη μορφή:



Τώρα αρκεί να υπολογίσουμε την πιθανότητα απορρόφησης του συστήματος από την κατάσταση 6. Οι πιθανότητες απορρόφησης, a_i, από την 6 ξεκινώντας από την κατάσταση i, ικανοποιούν τις εξισώσεις:

- $a_6 = 1$,
- $a_1 = 0$, (1: κατάσταση απορρόφησης διαφορετική της 6)
- $a_2 = P_{21} \cdot a_1 + P_{22} a_2 + P_{23} a_3 + P_{26} a_6 \Rightarrow$

  $a_2 = 0.2 a_1 + 0.3 a_2 + 0.4 a_3 + 0.1 a_6$,
- $a_3 = P_{31} a_1 + P_{32} a_2 + P_{33} a_3 + P_{36} a_6 \Rightarrow$

  $a_3 = 0.2 a_2 + 0.8 a_6$

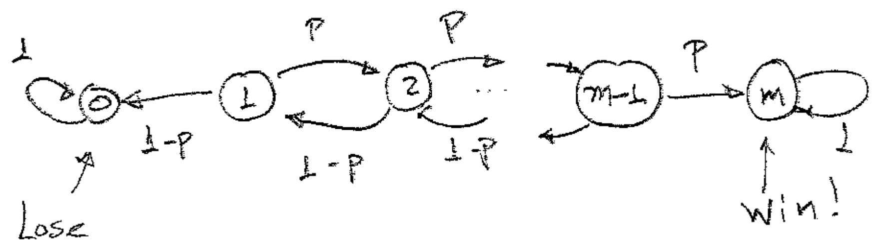
$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} a_2 &= 0.3 a_2 + 0.4 a_3 + 0.1 \\ a_3 &= 0.2 a_2 + 0.8 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} a_2 &= 21/31 \\ a_3 &= 29/31. \end{aligned}}$$

□.

Παράδειγμα. (Καταστροφή του Παίκτη – Gambler's Ruin).

Ένας παίκτης κερδίζει 1€ σε κάθε γύρο με πιθανότητα p και χάνει 1€ με πιθ. $1-p$. Διαφορετικοί γύροι θεωρούνται ανεξάρτητοι. Ο παίκτης παίζει συνεχώς έως ότου είτε μαζέψει συνολικά m€, είτε χάσει όλα τα λεφτά του. Ποια η πιθανότητα ότι τελικά θα μαζέψει m € και ποια ότι τελικά θα μείνει απένταρος;

Εισάγουμε μια αλυσίδα Markov όπου η κατάσταση i αναπαριστά το κεφάλαιο του παίκτη στο τέλος ενός γύρου. Συνεπώς, οι καταστάσεις $i=0$ και $i=m$ αντιστοιχούν στα γεγονότα ο παίκτης να χάσει και να κερδίσει, αντίστοιχα.



Είναι προφανές ότι όλες οι καταστάσεις της αλυσίδας είναι μεταβατικές εκτός των κατ. 0 και m που είναι καταστάσεις απορροφήσεως. Επομένως, αρκεί να βρούμε τις πιθανότητες απορροφήσεως του συστήματος από τις καταστάσεις 0 και m. Προφανώς, αυτές οι πιθανότητες εξαρτώνται από την αρχική κατάσταση του συστήματος (αρχικό κεφάλαιο του παίκτη.)

Έστω πρώτα ότι $s=0$, οπότε η πιθανότητα απορροφήσεως a_i ισούται με την πιθανότητα καταστροφής του παίκτη, όταν αυτός έχει αρχικό κεφάλαιο i. Ισχύει ότι:

$$a_0 = 1,$$
$$a_i = (1-p)\,a_{i-1} + p\,a_{i+1}, \quad i=1,\dots,m-1,$$
$$\Rightarrow a_i - pa_i = (1-p)a_{i-1} + p\,a_{i+1} - pa_i$$
$$(1-p)a_i = (1-p)a_{i-1} - p(a_i - a_{i+1})$$
$$a_m = 0.$$

Ο τρόπος επίλυσης του ανωτέρω συστήματος εξισώσεων είναι ο εξής: Για τις εξισώσεις των a_i, αν προσθέσουμε και στα δύο μέρη τον όρο $-pa_i$, θα έχουμε:

$$(1-p)(a_{i-1} - a_i) = p\,(a_i - a_{i+1}), \quad i=1,\dots,m-1.$$

Θέτουμε
$$\delta_i = a_i - a_{i+1}, \quad i=1,\dots,m-1,$$
και
$$\rho = \frac{1-p}{p}.$$

Τότε οι εξισώσεις γράφονται ως:

$$\delta_i = \rho\,\delta_{i-1}, \quad i=1,\dots,m-1$$

$$\Rightarrow \quad \delta_i = \rho^i \delta_0, \quad \delta_0 = a_0 - a_1, \quad i=1,\dots,m-1.$$

Επίσης, ισχύει ότι $\delta_0 + \delta_1 + \dots + \delta_{m-1} = a_0 - a_m = 1 - 0 = 1$

$$\Rightarrow \quad (1+\rho+\dots+\rho^{m-1})\cdot\delta_0 = 1.$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{m-1} \rho^k \cdot \delta_0 = 1 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1-\rho^m}{1-\rho}\,\delta_0 = 1, & \rho \neq 1 \\ m\,\delta_0 = 1, & \rho = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \delta_0 = \begin{cases} \dfrac{1-\rho}{1-\rho^m}, & \rho \neq 1 \\ 1/m, & \rho = 1 \end{cases}$$

και επομένως

$$\delta_i = \begin{cases} \dfrac{\rho^i(1-\rho)}{1-\rho^m}, & \rho \neq 1 \\ \dfrac{1}{m}, & \rho = 1. \end{cases}$$

Οι πιθανότητες απορροφήσεως δίνονται τώρα από: Για $\rho \neq 1$:

$$\delta_0 + \delta_1 + \dots + \delta_{i-1} = a_0 - \cancel{a_1} + \cancel{a_1} - \cancel{a_2} + \dots + \cancel{a_{i-1}} - a_i \Rightarrow$$

$$a_i = a_0 - \delta_{i-1} - \dots - \delta_0 = 1 - (\rho^{i-1} + \dots + \rho + 1)\cdot\delta_0$$

$$= 1 - \frac{1-\rho^i}{1-\rho}\cdot\frac{1-\rho}{1-\rho^m} = 1 - \frac{1-\rho^i}{1-\rho^m}$$

$$\therefore \quad a_i = \frac{\rho^i - \rho^m}{1-\rho^m}, \quad i=1,\dots,m-1, \quad \rho \neq 1$$

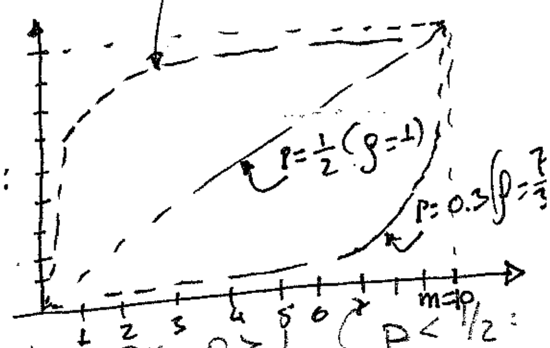
Για $\rho = 1$, $a_i = 1 - i\cdot\dfrac{1}{m} = \dfrac{m-i}{m}$.

Άρα, η πιθανότητα καταστροφής του παίχτη με αρχικό κεφάλαιο i € είναι

$$a_i = \begin{cases} \dfrac{\rho^i - \rho^m}{1-\rho^m}, & \rho \neq 1 \\[2mm] \dfrac{m-i}{m}, & \rho = 1 \end{cases}$$

Η πιθανότητα να μαζέψει συνολικά m € έχοντας αρχικό κεφάλαιο i € είναι $1-a_i$:

$$1-a_i = \begin{cases} \dfrac{1-\rho^i}{1-\rho^m}, & \rho \neq 1 \\[2mm] i/m, & \rho = 1. \end{cases}$$



Παρατηρώντας τις εκφράσεις, βλέπουμε ότι αν $\rho > 1$ ($p < 1/2$: πιθανότητα κέρδους σε κάθε γύρο $< 1/2$), η πιθανότητα καταστροφής τείνει στο 1 καθώς $m \to \infty$, ανεξάρτητα από το αρχικό κεφάλαιο, i, του παίχτη. Δηλαδή: αν πηγαίνετε για μεγάλο κέρδος ενάντια στις πιθανότητες, η οικονομική καταστροφή είναι σχεδόν βέβαιη!

2.4.1 Μέσος χρόνος απορρόφησης (Expected time to absorbtion)

Μέγεθος που μας ενδιαφέρει: Μέσος αριθμός των μεταβάσεων έως την επίσκεψη μιας έμμονης κατάστασης* ξεκινώντας από μια μεταβατική κατάσταση. Για κάθε κατάσταση i ορίζουμε:

$$\mu_i \triangleq E\,[\text{αριθμός μεταβάσεων μέχρι την απορρόφηση, ξεκινώντας από } i]$$

$$= E\,[\min\{n \geq 0 \,/\, X_n : \text{έμμονη}\} \,/\, X_0 = i\,].$$

Αν η i είναι έμμονη, ο παραπάνω ορισμός δίνει $\mu_i = 0$.

*: γεγονός το οποίο αναφέρεται ως "απορρόφηση" του συστήματος.

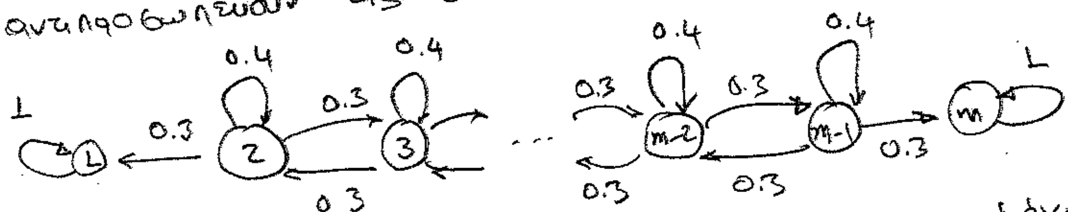
Οι εξισώσεις υπολογισμού των μ_i μπορούν να προκύψουν επίσης από το θεώρημα ολικής μέσης τιμής. Πράγματι, ο χρόνος απορροφήσεως ξεκινώντας από τη μεταβατική κατάσταση i ισούνται με 1 συν το μέσο χρόνο απορροφήσεως ξεκινώντας από την επόμενη κατάσταση, η οποία είναι η j με πιθανότητα P_{ij}:

Οι μέσοι χρόνοι απορροφήσεως μ_i, ξεκινώντας από την κατάσταση i είναι οι μοναδικές λύσεις του συστήματος

$$\mu_i = 0 \quad , \text{ για κάθε έμμονη κατάσταση } i,$$

$$\mu_i = 1 + \sum_{j=1}^{m} P_{ij} \cdot \mu_j \quad , \text{ για κάθε μεταβατική κατάσταση } i.$$

<u>Παράδειγμα</u>: (Η μύγα και οι αράχνες). Στο παράδειγμα που έχουμε ήδη δει, οι καταστάσεις της αλυσίδας Markov αντιστοιχούν στις πιθανές θέσεις της μύγας, και οι καταστάσεις απορροφήσεως 1 και m αντιπροσωπεύουν τις θέσεις όπου πιάνεται από τις αράχνες.



Θέλουμε να υπολογίσουμε τον μέσο αριθμό βημάτων μέχρι να πιαστεί η μύγα. Έχουμε:

$$\mu_1 = \mu_m = 0,$$

και

$$\mu_i = 1 + 0.3\,\mu_{i-1} + 0.4\,\mu_i + 0.3\,\mu_{i+1} \quad , i = 2, \dots, m-1.$$

Για $m=4$,

$$\left.\begin{array}{l} \mu_2 = 1 + 0.4\mu_2 + 0.3\mu_3 \Rightarrow \mu_2 = \dfrac{1}{0.6} + \dfrac{1}{2}\mu_3 \\ \mu_3 = 1 + 0.3\mu_2 + 0.4\mu_3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu_3 = 10/3 \quad , \mu_2 = 10/3$$

2.4.2 Μέσος χρόνος έως την πρώτη επίσκεψη

(Mean first passage times)

Μέγεθος που μας ενδιαφέρει: Μέσος αριθμός των βημάτων μέχρι την πρώτη διέλευση του συστήματος από μία συγκεκριμένη έμμονη κατάσταση, s, ξεκινώντας από μια οποιαδήποτε κατάσταση, i. Θεωρούμε αλυσίδες Markov με μία μοναδική κλάση επικοινωνίας. Τότε:

t_i : Μέσος χρόνος πρώτης μετάβασης του συστήματος από την κατάσταση i στην κατάσταση s.

$$t_i \triangleq E[\text{αριθμός των μεταπηδήσεων μέχρι την πρώτη διέλευση από την } s, \text{ ξεκινώντας από την } i]$$

$$= E[\min\{n \geq 0 \,/\, X_n = s\} \,/\, X_0 = i].$$

Οι μεταβάσεις του συστήματος από την s δεν επηρεάζουν τον υπολογισμό των t_i. Μπορούμε λοιπόν να θεωρήσουμε ένα νέο μοντέλο Markov, ίδιο με το αρχικό, αλλά με την κατάσταση s να έχει μετατραπεί σε κατάσταση απορρόφησης: $P_{ss} = 1$ και $P_{sj} = 0 \;\forall\, j \neq s$. Επομένως οι t_i μπορούν να υπολογιστούν ως να είναι οι μέσοι χρόνοι απορρόφησης από την s, ξεκινώντας από την i:

$$\begin{cases} t_i = 1 + \sum_{j=1}^{m} P_{ij} t_j, & \forall\, i \neq s, \\ t_s = 0. \end{cases}$$

Οι παραπάνω γραμμικές εξισώσεις δίνουν τον αναμενόμενο χρόνο μέχρι την επίσκεψη μιας συγκεκριμένης κατάστασης s, ξεκινώντας από μια οποιαδήποτε κατάσταση.

Επίσης, μπορούμε να υπολογίσουμε τον μέσο χρόνο πρώτης επανόδου (mean recurrence time) σε μια κατάσταση s, ξεκινώντας από την s:

$$t_s^* \triangleq E\Big[\text{αριθμός των μεταπηδήσεων μέχρι την πρώτη επιστροφή στην } s, \text{ ξεκινώντας από την } s\Big]$$

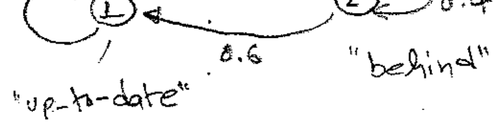
$$= E\big[\min\{n \geq 1 \,/\, X_n = s\} \,/\, X_0 = s\big].$$

Ο χρόνος επιστροφής στην s, ξεκινώντας από την s, ισούται με 1 συν τον αναμενόμενο χρόνο επίσκεψης της s ξεκινώντας από την επόμενη κατάσταση, η οποία είναι η j με πιθανότητα P_{sj}. Εφαρμόζοντας το θεώρημα ολικής μέσης τιμής, έχουμε:

$$t_s^* = 1 + \sum_{j=1}^{m} P_{sj} \cdot t_j ,$$

όπου t_j είναι οι μέσοι χρόνοι πρώτης επίσκεψης της s, ξεκινώντας από την j.

Παράδειγμα: Για το πρόβλημα με τον μαθητή, ο οποίος στο τέλος της εβδομάδας είναι ενημερωμένος ή έχει μείνει πίσω:



Αν επικεντρωθούμε στην κατάσταση s = 1, θέλουμε να υπολογίσουμε τον μέσο χρόνο έως την πρώτη επίσκεψη της κατάστασης 1, ξεκινώντας από την 2.

Έχουμε: $t_1 = 0$

$$t_2 = 1 + P_{21}t_1 + P_{22}t_2 = 1 + 0.6\times 0 + 0.4\cdot t_2 \Rightarrow t_2 = 1/0.6 = 5/3$$

Ο μέσος χρόνος πρώτης επανόδου στην 1 είναι: $t_1^* = 1 + P_{11}t_1 + P_{12}t_2$

$$= 1 + 0.8\times 0 + 0.2\cdot\tfrac{5}{3} = 4/$$

2.5 ΠΙΟ ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΛΥΣΙΔΕΣ MARKOV

Έως τώρα μελετήσαμε αλυσίδες Markov διακριτού χρόνου όπου ο χώρος καταστάσεων (διακριτός) είναι ένα πεπερασμένο σύνολο. Πιο γενικές αλυσίδες Markov μπορεί να υπάρξουν. Πιο συγκεκριμένα, αλυσίδες Markov σε συνεχή χρόνο και σε διακριτό χρόνο αλλά με αριθμήσιμα άπειρο σύνολο καταστάσεων.

2.5.1 Αλυσίδες Markov με αριθμήσιμα άπειρο σύνολο καταστάσεων

Θεωρούμε μια σ.δ. Markov $\{X_1, X_2, \ldots\}$ της οποίας η κατάσταση X_n μπορεί να πάρει οποιαδήποτε θετική ακέραια τιμή. Οι πιθανότητες μετάβασης

$$P_{ij} = P(X_{n+1} = j \,/\, X_n = i), \quad i,j = 1,2,3,\ldots$$

Περιγράφουν την σ.δ. με ένα γράφημα που περιέχει ένα αριθμήσιμα άπειρο σύνολο κόμβων που αντιστοιχεί στους ακέραιους αριθμούς $1, 2, \ldots$

Ανάλογα με την περίπτωση πεπερασμένου συνόλου καταστάσεων, οι εξισώσεις Chapman-Kolmogorov για τις πιθανότητες μετάβασης ανωτέρας τάξης είναι:

$$r_{ij}(n+1) = \sum_{k=1}^{+\infty} r_{ik}(n) \cdot P_{kj}, \quad i,j = 1,2,\ldots$$

όπου $\quad r_{ij}(n) = P(X_n = j \,/\, X_0 = i), \quad i,j = 1,2,\ldots$

Επιπλέον οι εξισώσεις ισορροπίας γίνονται:

$$\pi_j = \sum_{k=1}^{+\infty} \pi_k \cdot P_{kj}, \quad i,j = 1,2,\ldots$$

Το αντίστοιχο θεώρημα σύγκλισης διαμορφώνεται ως εξής:

Steady-state convergence thm.

Έστω απεριοδική αλυσίδα Markov με αριθμήσιμα άπειρο σύνολο καταστάσεων όπου κάθε κατάσταση είναι προσιτή από οποιαδήποτε άλλη. Τότε, υπάρχουν δύο περιπτώσεις

(1) Οι $r_{ij}(n)$ συγκλίνουν στην στάσιμη κατανομή (steady-state probability distribution) $(\pi_1, \pi_2, \dots)$. Σε αυτή την περίπτωση οι π_j αποτελούν τη μοναδική λύση των εξισώσεων ισορροπίας

$$\pi_j = \sum_{k=1}^{+\infty} \pi_k \cdot P_{kj} \quad , \quad i,j = 1,2,\dots$$

μαζί με την $\pi_1 + \pi_2 + \dots = 1$. Επιπλέον, οι π_j ερμηνεύονται ως αναμενόμενες συχνότητες καταστάσεων

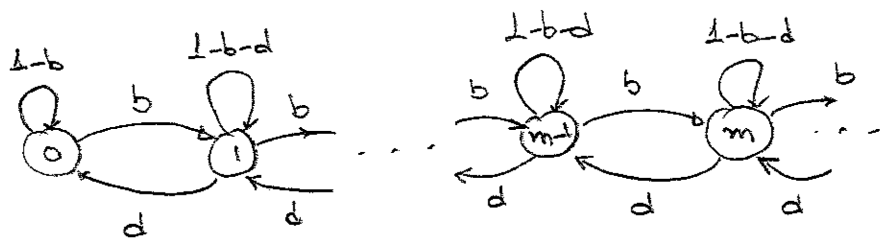
$$\pi_j = \lim_{n \to \infty} \frac{v_{ij}(n)}{n},$$

όπου $v_{ij}(n)$ είναι ο μέσος αριθμός επισκέψεων του συστήματος στην κατάσταση j μέσα στις n πρώτες μεταπηδήσεις, ξεκινώντας από την κατάσταση i.

(2) Όλες οι $r_{ij}(n)$ συγκλίνουν στο 0 καθώς $n \to \infty$. και οι εξισώσεις ισορροπίας δεν έχουν άλλη λύση παρά την $\pi_j = 0 \ \forall j$.

Παράδειγμα: Ουρά με άπειρη χωρητικότητα αποθήκευσης (Queueing w. infinite buffer space).

Θεωρούμε και πάλι το παράδειγμα του τηλεπικοινωνιακού κόμβου, μόνο που αυτή τη φορά ο buffer έχει άπειρο αποθηκευτικό χώρο. Το γράφημα της αλυσίδας Markov για αυτή την περίπτωση είναι:



Και πάλι οι καταστάσεις $0, 1, 2, \ldots, m, \ldots$ της αλυσίδας αντιστοιχούν στον αριθμό των πακέτων στον buffer. Οι τοπικές εξισώσεις ισορροπίας είναι:

$$\pi_i b = \pi_{i+1} d \quad , \quad i = 0, 1, \ldots$$

$$\Rightarrow \quad \pi_{i+1} = \rho \, \pi_i \quad , \quad \text{όπου } \rho = b/d .$$

Συνεπώς $\pi_i = \rho^i \cdot \pi_0 \quad \forall i$. Αν $\rho < 1$, η εξίσωση κανονικοποίησης $1 = \sum_{i=0}^{+\infty} \pi_i$ δίνει:

$$1 = \sum_{i=0}^{+\infty} \rho^i \pi_0 = \frac{\pi_0}{1-\rho} ,$$

οπότε $\pi_0 = 1 - \rho$ και η στάσιμη κατανομή είναι:

$$\boxed{\pi_i = \rho^i (1-\rho) \quad , \quad i = 0, 1, 2, \ldots}$$

Αν $\rho > 1$ (πιθανότητα άφιξης νέου πακέτου τουλάχιστον ίση με την πιθανότητα εξυπηρέτησης /μετάδοσης υπάρχοντος πακέτου από την ουρά), η $1 = \pi_0 (1 + \rho + \rho^2 + \ldots) \Rightarrow \pi_0 = 0$ οπότε και $\pi_i = \rho^i \pi_0 = 0 \quad \forall i$.

Εαρινό Εξάμηνο 2005 27 Ιουνίου 2005

Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες - Τελική Εξέταση
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης
Διάρκεια: 3 Ώρες

Θέμα 1 - 25 μονάδες. Αφίξεις κατά Poisson.

Ο Κώστας προσπαθεί να πάει στο Χαλάνδρι από την Κατεχάκη. Γνωρίζει ότι υπάρχουν δύο γραμμές λεωφορείων που θα τον παν στον προορισμό του. Η μία γραμμή ξεκινά από το Σύνταγμα ενώ η άλλη ξεκινά από την Ομόνοια. Τα λεωφορεία από το Σύνταγμα και την Ομόνοια καταφθάνουν στην Κατεχάκη με εκθετικά κατανεμημένους και ανεξάρτητους μεταξύ τους χρόνους μεταξύ των αφίξεων με μέσες τιμές μ_s και μ_o, αντίστοιχα. Τα λεωφορεία από το Σύνταγμα και την Ομόνοια ταξιδεύουν με σταθερές ταχύτητες, v_s και v_o, αντίστοιχα. Η Κατεχάκη βρίσκεται σε απόσταση l_s από το Σύνταγμα και σε απόσταση l_o από την Ομόνοια.

(α) Αν επιλέξουμε τυχαία ένα λεωφορείο που φτάνει στην Κατεχάκη, ποια είναι η πιθανότητα ότι το λεωφορείο έρχεται από το Σύνταγμα;

(β) Δεδομένου ότι ο χρόνος μεταξύ των αφίξεων του τέταρτου και πέμπτου λεωφορείου, X_5, είναι μεγαλύτερος από t, ποια η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) της τυχαίας μεταβλητής (τ.μ.) X_5;

(γ) Ποια είναι η πιθανότητα ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον λεωφορείο το οποίο κατευθύνεται προς τον Κώστα (δηλαδή ένα τουλάχιστον λεωφορείο το οποίο κατευθύνεται από το Σύνταγμα ή την Ομόνοια προς την Κατεχάκη).

(δ) Όσο περιμένει το λεωφορείο, ο Κώστας αποκοιμιέται. Όσο κοιμάται, 4 συνεχόμενα λεωφορεία περνούν. Ποια είναι η σ.π.π. του χρόνου μεταξύ των αφίξεων του πρώτου και του τέταρτου λεωφορείου;

(ε) Στην στάση ο Κώστας περιμένει και κάποιον φίλο του ο οποίος αργεί να έρθει. Καθώς βαριέται να περιμένει, ο Κώστας αποφασίζει να ρίχνει ένα δίκαιο κέρμα κάθε φορά που περνά ένα λεωφορείο. Ποια είναι η σ.π.π. της χρονικής διάρκειας μεταξύ δύο διαδοχικών "κεφαλών";

Θέμα 2 - 25 μονάδες. Μία απλή Μαρκοβιανή αλυσίδα.

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας μετάβασης μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας τριών καταστάσεων

$$P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.1 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

(α) Δώστε το γράφημα αυτής της αλυσίδας.

(β) Μακροπρόθεσμα, τι ποσοστό του χρόνου βρίσκεται η αλυσίδα σε κάθε μία από τις τρεις καταστάσεις;

Θέμα 3 - 25 μονάδες. Μοντέλο Ehrenfest για την κίνηση μορίων.

N μπάλες είναι μοιρασμένες σε δύο δοχεία. Έστω X_n ο αριθμός από μπάλες που περιέχονται στο δοχείο 1 τη στιγμή n. Διαλέγουμε τυχαία μία από τις μπάλες και την μετακινούμε στο χρόνο $n+1$ στο άλλο δοχείο απο αυτό που βρισκόταν τη στιγμή n.

(α) Προσδιορίστε τις καταστάσεις της Μαρκοβιανής αλυσίδας $\{X_n,\ n=0,1,\ldots\}$, τις πιθανότητες μετάβασης μεταξύ των καταστάσεων και δώστε το γράφημα της αλυσίδας.

(β) Υπολογίστε τη στάσιμη κατανομή της αλυσίδας.

Θέμα 4 - 25 μονάδες. Από κοινού κανονικές τ.μ..

Έστω X και Z από κοινού κανονικές τ.μ. με μηδενική μέση τιμή και $\sigma_X^2 = 4$, $\sigma_Z^2 = 17/9$, και $E[XZ] = 2$. Ορίζουμε μια νέα τ.μ. $Y = 2X - 3Z$.

(α) Ποια είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. Y;

(β) Ποια είναι η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των X και Y;

ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ - ΛΥΣΕΙΣ

27/6/2005.

ΘΕΜΑ 1ο.

(α) Από την εκφώνηση, έχουμε ότι οι χρόνοι άφιξης είναι ανεξάρτητες εκθετικά κατανεμημένες τ.μ. με μέσες τιμές $\mu_s = 1/\lambda_s$ και $\mu_o = 1/\lambda_o$, αντίστοιχα. Συνεπώς, ορίζονται δύο ανεξάρτητες σ.δ. Poisson με ρυθμούς λ_s και λ_o, αντίστοιχα.

Αν θεωρήσουμε τη συνολική σ.δ. των αφίξεων λεωφορείων στην Κατεχάκη, αυτή είναι μια νέα Poisson σ.δ. με ρυθμό $\lambda_s + \lambda_o$. Δεδομένης μιας άφιξης της συνολικής σ.δ. η πιθανότητα ότι η άφιξη προέρχεται από τη σ.δ. S (Σύνταγμα) είναι $\frac{\lambda_s}{\lambda_s + \lambda_o}$.

(β) Για τη συνολική σ.δ. οι χρόνοι μεταξύ των αφίξεων ακολουθούν την εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda_s + \lambda_o$. Η εκθετική κατανομή δεν έχει μνήμη και επομένως δεδομένου του γεγονότος $\{X_S > t\}$, η X_S είναι επίσης εκθετική με παράμετρο $\lambda_s + \lambda_o$:

$$f_{X_S/\{X_S>t\}}(x/X_S>t) = (\lambda_s+\lambda_o)\, e^{-(\lambda_s+\lambda_o)(x-t)}, \quad x \geq t.$$

(γ) Ένα λεωφορείο από το Σύνταγμα ή την Ομόνοια κάνει l_s/v_s ή l_o/v_o μονάδες χρόνου να φτάσει στην Κατεχάκη.

Επομένως,

$$P(\text{λεωφορείο καθ' οδόν}) = 1 - P(\text{κανένα λεωφορείο καθ' οδόν})$$

$$= 1 - P(\text{κανένα λεωφορείο από Σύνταγμα ΚΑΙ κανένα λεωφ. από Ομόνοια})$$

$$= 1 - P(\text{κανένα λ. από Σύνταγμα})\, P(\text{κανένα από Ομόνοια})$$

[ανεξάρτητες σ.δ. Poisson].

$$= 1 - \frac{(\lambda_s l_s/v_s)^0 e^{-\lambda_s \frac{l_s}{v_s}}}{0!} \cdot \frac{(\lambda_o \frac{l_o}{v_o}) e^{-\lambda_o \frac{l_o}{v_o}}}{0!}$$ (2)

$$= 1 - e^{-\left(\lambda_s \frac{l_s}{v_s} + \lambda_o \frac{l_o}{v_o}\right)}.$$

(δ) Οι χρόνοι X_i των αφίξεων μεταξύ του i-στού και (i+1)-στού λεωφορείου είναι ανεξάρτητες εκθετικές τ.μ. με παρ. $\lambda_s + \lambda_o$. Επομένως, η τ.μ. Y, ο χρόνος μεταξύ των αφίξεων του 1ου και 4ου λεωφορείου είναι μια Erlang τ.μ. τάξης = 3. Συνεπώς, για την $Y = X_1 + X_2 + X_3$,

$$f_Y(y) = \frac{(\lambda_s+\lambda_o)^3 y^2 e^{-(\lambda_s+\lambda_o) y}}{2!}, \quad y \geq 0.$$

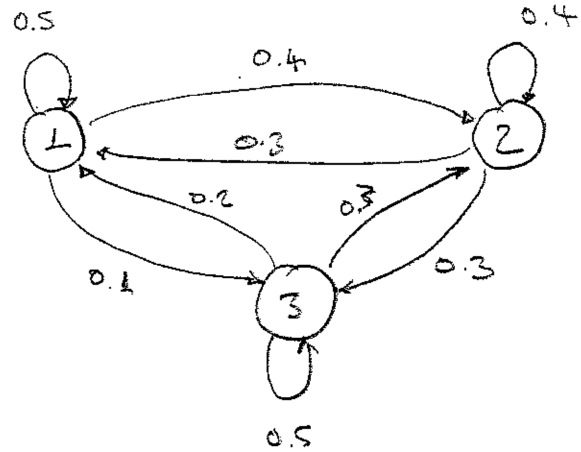
(ε) Θεωρούμε την "split" σ.δ. Poisson όπου μία άφιξη συμβαίνει όταν έρχεται ένα λεωφορείο και όταν ο Κώστας φέρνει κεφαλή. Καθώς οι αφίξεις των λεωφορείων και οι ρίψεις του κέρματος είναι ανεξάρτητα πειράματα, η νέα "split" σ.δ. Poisson έχει παράμετρο $\lambda = p(\lambda_s + \lambda_o)$

$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}(\lambda_s + \lambda_o)$ (δίκαιο κέρμα). Για αυτή τη σ.δ. οι χρόνοι μεταξύ των αφίξεων θα ακολουθούν εκθετική κατανομή με παρ. λ. Συνεπώς η σ.π.π. της χρονικής διάρκειας μεταξύ δύο διαδοχικών κεφαλών είναι:

$$f_R(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\lambda_s+\lambda_o) e^{-\frac{1}{2}(\lambda_s+\lambda_o)t}, & t \geq 0 \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

ΘΕΜΑ 2ο

(α)



(β) Η αλυσίδα είναι απεριοδική με μια κλάση επικοινωνίας {1, 2, 3}.
Τα χρονικά ποσοστά δίνονται από τις πιθανότητες σταθερής κατάστασης π_0, π_1, π_2 που προκύπτουν λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων

$$\pi_j = \sum_{i=0}^{2} \pi_i P_{ij} \quad , \quad j = 0, 1, 2.$$

μαζί με την σχέση $\sum_{i=1}^{2} \pi_i = 1$. Έχουμε

$$\left.\begin{aligned} \pi_0 &= 0.5\pi_0 + 0.3\pi_1 + 0.2\pi_2 \\ \pi_1 &= 0.4\pi_0 + 0.4\pi_1 + 0.3\pi_2 \\ \pi_2 &= 0.1\pi_0 + 0.3\pi_1 + 0.5\pi_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$$

$$\Rightarrow \pi_0 = \frac{21}{62}, \quad \pi_2 = \frac{23}{62}, \quad \pi_3 = \frac{9}{31}.$$

(Τ)

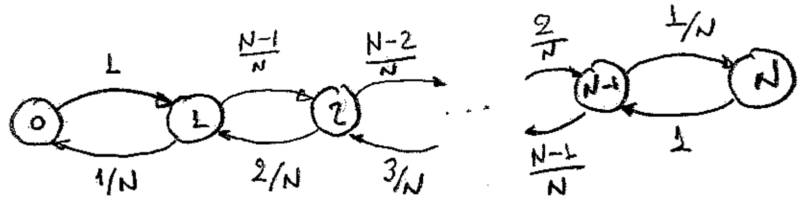
ΘΕΜΑ 3ο (α) Σύνολο καταστάσεων: $\{0,1,\dots,N\}$ (= αριθμός των μπαλών στο δοχείο 1). Σε αυτή την Μαρκοβιανή αλυσίδα, μεταβάσεις συμβαίνουν μόνο μεταξύ γειτονικών καταστάσεων. Η πιθανότητα μετάβασης από την κατάσταση i στην $i+1$ είναι η πιθανότητα να επιλέγει μία από τις $N-i$ μπάλες που βρίσκονται στο δοχείο 2, δηλαδή

$$P_{i,i+1} = \frac{N-i}{N} = 1 - P_{i,i-1}, \quad i=1,\dots,N-1$$

$$\Rightarrow P_{i,i-1} = \frac{i}{N}.$$

$$P_{0,1} = 1 = 1 - P_{0,0},$$

$$P_{N,N} = 0 = 1 - P_{N,N-1}.$$



(β) Η στάσιμη κατανομή πιθανότητας ικανοποιεί τις τοπικές εξισώσεις ισορροπίας:

$$\pi_i P_{i,i+1} = \pi_{i+1} P_{i+1,i} \Rightarrow$$

$$\pi_i \frac{N-i}{N} = \pi_{i+1} \frac{i+1}{N}, \quad i=0,\dots,N.$$

$$\Rightarrow \pi_{i+1} = \frac{N-i}{i+1}\pi_i, \quad i=0,\dots,N$$

$$\Rightarrow \pi_1 = \frac{N}{1}\pi_0$$

$$\pi_2 = \frac{N-1}{2}\pi_1 = \frac{(N-1)\cdot N}{2\cdot 1}\pi_0$$

$$\pi_3 = \frac{N-2}{3}\pi_2 = \frac{(N-2)(N-1)N}{3\cdot 2\cdot 1}\pi_0$$

$$\vdots$$

$$\pi_i = \frac{(N-i+1)(N-i+2)\cdots N}{i(i-1)\cdots 2\cdot 1}\,\pi_0 = \frac{N!}{i!\,(N-i)!}\,\pi_0 = \binom{N}{i}\pi_0$$

Αντικαθιστώντας στην $\sum_{i=0}^{N} \pi_i = 1$, έχουμε:

$$\pi_0 \underbrace{\sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i}}_{2^N} = 1 \Rightarrow \underline{\pi_0 = 2^{-N}}$$

Ώστε, η στάσιμη κατανομή του μοντέλου Ehrenfest είναι Διωνυμική $(N, 1/2)$:

$$\pi_i = \binom{N}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^N, \quad i = 0, 1, \ldots, N.$$

<u>ΘΕΜΑ 4ο</u> (α) Η τ.μ. Y είναι κανονική, ως γραμμικός συνδυασμός δύο κανονικών τ.μ. Τώρα:

$$E[Y] = 2E[X] - 3E[Z] = 2\cdot 0 - 3\cdot 0 = 0$$

$$\sigma_y^2 = E[Y^2] - \underbrace{E^2[Y]}_{0} = E\left[(2X-3Z)^2\right] = 4E[X^2] + 9E[Z^2] - 12E[XZ] = 4\sigma_x^2 + 9\sigma_z^2 - 12E[XZ] =$$

$$= 4\cdot 4 + 9\,\frac{17}{9} - 12\cdot 2 = 9$$

$$\therefore \quad f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_y}\, e^{-(y-\mu_y)^2/2\sigma_y} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,3}\, e^{-y^2/18}.$$

(β) Η από κοινού σππ των X & Y είναι κανονική. Η συνδιασπορά των X & Y είναι: $E[XY] = E[X(2X-3Z)] = 2E[X^2] - 3E[XZ]$

$$= 2\cdot 4 - 3\cdot 2 = 2.$$

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi|\Sigma|^{1/2}}\, e^{-[x\ y]\,\Sigma^{-1}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}.$$